

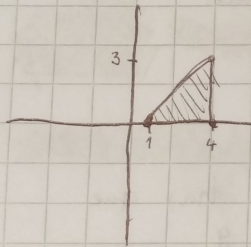
Pequeño recordatorio integrales

P] Calcular

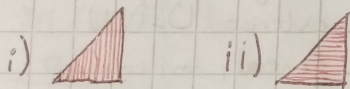
$$I = \iint_R (x-y) \cos(x-y) dA$$

donde R es el Δ de vertices $(1,0)$, $(4,0)$, $(4,3)$.

S] 1. ¿Cómo encontramos los lím de integración? Primero intentamos entender la región R .



Se puede rellenar la figura de 2 maneras, pero la más fácil es hacerlo con líneas paralelas a los ejes ~~coordenados~~ coordenados:



En ambos casos, las líneas están limitadas en un lado por la recta entre $(1,0)$ y $(4,3)$, así que hay que determinarla $\Rightarrow L_1: y=x-1$.

Ustedes pueden usar cualquier forma, pero voy a analizar estas dos:

- i) Aquí, para cada x entre 1 y 4 trazamos una línea roja entre $y=0$ y la recta L_1 , es decir entre $y=0$ e $y=x-1$, por lo que la integral queda

$$\int_1^4 \int_0^{x-1} (x-y) \cos(x-y) dy dx$$

- ii) Aquí, para cada y entre 0 y 3, trazamos una línea entre la recta L_1 y $x=4$, es decir entre $x=y+1$ y $x=4$, por lo que la integral queda

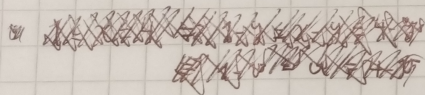
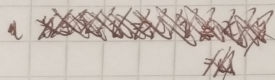
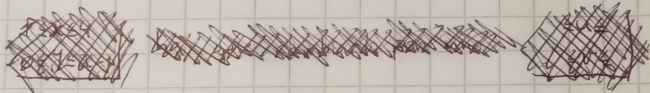
$$\int_0^3 \int_{y+1}^4 (x-y) \cos(x-y) dx dy$$

Obs 1: Cuando limitamos x con L_1 , ésta hay que expresarla como x en función de y .

Obs 2: Para el orden de las integrales, la regla es que los lím de integración de la integral exterior DEBEN ser números (no variables) y, en general, mientras de más variables dependan los límites de integración, más al interior deben ir la integrales.

2. Cambio de variable! Hay uno natural, que es $u = x - y$, pero ¿y el otro? Cuando la función puede ser expresada con solo una variable ($u \cos(u)$) y por lo tanto no hay candidato para la otra, se puede escoger cualquier combinación de variables que no sea múltiplo de u . Por ej: se puede $v = x$, $v = y$, ~~$v = x + y$~~ , $v = y + x$, $v = 3x - 2y$, etc., pero no se puede $v = x - y$, $v = 3x - 3y$, $v = 17(x - y)$, etc.

Vamos a usar ~~el~~ el cambio $(x, y) \mapsto (u, v) = (x - y, y)$ y los lím de integración de ii). Como hubo un cambio, también hay que cambiar los límites: El sistema



$$\begin{array}{|l} y+1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{array} \quad \text{hay que cambiarlo por uno} \quad \begin{array}{|l} u \leq 4 \\ v \leq 3 \end{array}$$

- Como $v = y$, ya sabemos que $0 \leq v \leq 3$
- $y+1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x-y \leq 4-y$
 $\Leftrightarrow 1 \leq u \leq 4-v$

Por lo tanto la integral queda: $I = \int_0^3 \int_1^{4-v} u \cos(u) du dv$

y el resto es calcularla como ya saben.