1. Sea $R = [0,1] \times [0,1]$. Dividimos este rectángulo en dos regiones B y C, donde $B = \{(x,y) \in R : y \geq x\}$ y $C = \{(x,y) \in C : y < x\}$. Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(y^2) & si \quad (x,y) \in B \\ 0 & si \quad (x,y) \in C \end{cases}$$

~~a)~~ Demuestre que f es integrable.
~~b)~~ Muestre que $\int_R f = \int_B f$.
~~c)~~ Muestre que

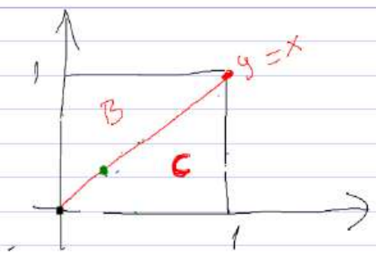
$$0 \leq \int_R f(x,y)dA \leq \frac{\sin(1)}{2}$$

d) Calcule $\int_R f(x,y)dA$

$A \subseteq B$ → medida nula

medida nula

Sol:
a)



• Note que el conjunto de discontinuidades es

$$\boxed{\{(x,y) \in R : y = x\} - \{(0,0)\}}$$
$$\subseteq \{(x,y) \in R : y = x\} = A$$

• El conjunto A tiene medida nula por ser el gráfico de una función continua $(x \mapsto x)$

Entonces, $\{(x,y)\in R : y = x\} - \{(0,0)\}$ también tiene medida nula.

Así, f es continua, salvo en un conjunto de medida y por lo tanto es integrable.

* Si el conjunto de discontinuidades de una función f tiene medida nula, entonces f es integrable.

b)

$$\iint_R f = \iint_{B\cup C} f \overset{B\cap C=\emptyset}{=} \iint_B f + \iint_C \cancel{f}^{\,0}$$

$$= \iint_B f$$

c) $\iint_R f = \iint_B f$ · Note que B es cerrado y acotado

$\Rightarrow$ B es compacto.

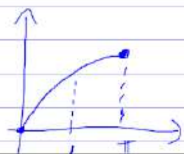
Por teo. del valor medio, existe $(z_0, w_0) \in B$ t.q.:

$$\iint_B f = A(B) \cdot f(z_0, w_0) = A(B) \cdot \sin(w_0^2)$$

$w_0 \in [0, 1]$

$$\boxed{A(B) = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \iint_B f = \frac{\sin(w_0^2)}{2}$$



Sabemos que $w_0^2 \in [0, 1]$

$x \mapsto \sin x$ es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$

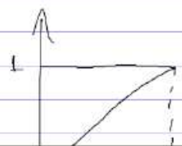
$$\Rightarrow \sin 0 \le \sin w_0^2 \le \sin 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \sin w_0^2 \le \sin 1 .$$

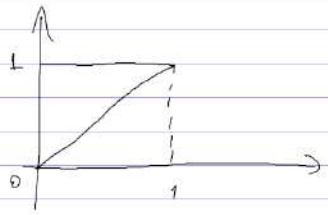
Entonces:

$$0 \le \iint_R f = \iint_B f = \frac{1}{2} \cdot \sin(w_0^2) \le \frac{1}{2} \cdot \sin 1$$

d) $\iint_R f = \iint_B f = \iint_B \sin y^2 \, dA .$



$B = \{(x,y) \in R : 0 \le x \le 1 \wedge x \le y \le 1\}$



• $B = \{(x,y) \in R : 0 \le x \le 1 \wedge x \le y \le 1\}$

• $B = \{(x,y) \in R : 0 \le y \le 1 \wedge 0 \le x \le y\}$

$$\iint_B \sin y^2 \, dA = \underbrace{\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 \, dy \, dx}_{\text{Muy difícil}} = \underbrace{\int_0^1 \int_0^y \sin y^2 \, dx \, dy}_{\text{Muy fácil}}$$

$$= \int_0^1 \sin y^2 \Big|_0^y \, dy$$

$$= \int_0^1 y \cdot \sin y^2 \, dy$$

$$= \int_0 x \sin y \Big|_0 \, dy$$

$$= \int_0^1 y \cdot \sin y^2 \, dy$$

$$u = y^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2y\,dy$$

$$= \int_0^1 \sin u \, \frac{du}{2}$$

$$= -\frac{\cos u}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 1\right)$$

//

2. Calcule la integral doble

$$\int x e^{\sqrt{x^2+y^2}} dA \qquad \boxed{x^2+y^2} \leq 5$$

$f(x,y)$