UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 5
Curso: Cálculo en Varias Variables MC3301-1
Fecha: 6 de mayo de 2022
Profesor de Cátedra: Juan Carlos Pozo
Ayudantes: Claudio Carrasco, Víctor Fernández

---

1. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = g(x)^{h(y)}$, donde g, h son funciones derivables adecuadas.

   b) $f(x,y) = \int_0^x g(yt)\,dt$, con g continua.

   Sol.

   a) Considerando $h(y)$ como constante, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)g(x)^{h(y)-1}g'(x)$. Por otro lado, considerando $g(x)$ como constante, y que $f(x,y) = e^{h(y)\ln(g(x))}$, se tiene que

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{h(y)\ln(g(x))}\ln(g(x))h'(y) = g(x)^{h(y)}\ln(g(x))h'(y)$$

   b) Recordemos que

   $$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

   si f es continua y g, h derivables. Por otro lado, es sencillo notar que mediante el cambio de variables $u = yt$, se tiene que

   $$f(x,y) = \int_0^x g(yt)\,dt = \frac{1}{y}\int_0^{xy} g(u)\,du$$

   Vemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}[g(xy)y]$, y aplicando la regla del cociente, se tiene que

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{g(xy)x\cdot y - \frac{1}{y}\int_0^{xy} g(u)\,du \cdot 1}{y^2}$$

2. Demuestre que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existe $(z_1, z_2) \in \{t(x,y) : t \in (0,1)\}$ tal que

   $$\ln(1 + x^2 + y^2) \leq 2\,\frac{(x,y)\cdot(z_1,z_2)}{1 + ||(z_1,z_2)||_2^2}$$

   donde $\cdot$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^2$.

   Sol. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$. Esta función es derivable en todo $\mathbb{R}^2$ (¿por qué?), el cual es convexo y abierto.
   Aplicando el teorema del valor medio en varias variables en los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y

$(0,0) \in \mathbb{R}^2$, existe $(z_1, z_2) \in \{(1-t)(0,0) + t(x,y) : t \in (0,1)\} = \{t(x,y) : t \in (0,1)\}$ tal que

$$f(x,y) - f(0,0) = \nabla f(z_1, z_2) \cdot ((x,y) - (0,0))$$

Equivalentemente

$$\ln(1 + x^2 + y^2) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_1, z_2)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_1, z_2)y$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\ln(1 + x^2 + y^2) &= \frac{2z_1}{1 + z_1^2 + z_2^2}x + \frac{2z_2}{1 + z_1^2 + z_2^2}y \\
&= 2\frac{(z_1, z_2) \cdot (x,y)}{1 + ||(z_1, z_2)||_2^2}
\end{aligned}$$

3. Sea $z = g(x,y)$, con $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y $x := e^r \cos(\theta)$ e $y := e^r \sin(\theta)$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = e^{-2r}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right)$$

Sol. La función g se puede ver como dependiendo Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}e^r\cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}e^r\sin(\theta) = e^r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\sin(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}e^r\sin(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}e^r\cos(\theta) = e^r\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos(\theta)\right)$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 &= e^{2r}\left((\frac{\partial z}{\partial x})^2\cos^2(\theta) + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\sin^2(\theta) + 2\frac{\partial z}{\partial x}\cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial y}\sin(\theta)\right) \\
\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= e^{2r}\left((\frac{\partial z}{\partial x})^2\sin^2(\theta) + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\cos^2(\theta) - 2\frac{\partial z}{\partial x}\cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial y}\sin(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, y utilizando que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$, se obtiene lo pedido.

4. Supongamos que $u(t,x)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$$

y que x es una función de t de la forma $x = f(t)$ tal que

$$\frac{dx}{dt} = u(t,x).$$

Demuestre que la función $t \to u(t, f(t))$ es constante.