Ayudantía 11 — 07/06

* Ideas series de funciones:

- Hipótesis: Para toda red cristalina de iones, existe una función $f_n(x)$ tal que la energía potencial electrostática de la red es:

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} f_n(x)$$

* Electricidad y Magnetismo, Purcell

[Berkeley Physicks Course (2)]

→ Cheat sheet.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Sabemos

$2^n < n!$

$\Rightarrow \frac{1}{n!} < \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{converge.}}$

$\sum \frac{1}{n!}$ converge!!

¿Qué crece más rápido?

$\forall k \in \mathbb{N};\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n > n_0;$

$$n^k < k^n < n!$$

$k=2$ $\quad n^2 < 2^n < n!$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ¿se puede usar otro?

Cociente: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

En este caso: $a_n = \frac{1}{n!}$

Luego: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$

$$= \frac{n!}{(n+1)!}$$

$(n+1)! = (n+1)\, n!$

$\frac{5!}{4!} = \frac{\cancel{4!}\cdot 5}{\cancel{4!}}$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ conv.

---

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n!)}{n!+n}$

$n! < n! + n$

$$\frac{\cos^2(n!)}{n!+n} \leq \frac{1}{n!+n} < \frac{1}{n!}$$

conv.

$\frac{1}{n} \to 0$; pero $\sum \frac{1}{n} \to \infty$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D

p-serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ C

En este caso: $f(x) = \frac{1}{x^p}$

Ya que: $f(n) = \frac{1}{n^p}$

¿Qué pasa con $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$?

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx$$

$$= \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} \quad (p \neq 1) \qquad (p=1) \quad \ln(x) \Big|_1^{\infty}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b \qquad = \lim_{b \to \infty} \ln(x) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left. \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{-p+1} \right|_1^b \qquad = \lim_{b \to \infty} \ln(b) \to \infty$$

$\boxed{p = 1 \text{ div.}}$ ∞

Hay que estudiar.

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{p-1}}$$

$p = 1 + d$

$\frac{1}{b^d} \to 0$; $d > 0$

$\frac{1}{b^d} \to \infty$; $d < 0$

$\boxed{p < 1 \; ; \to \infty}$

$\boxed{p > 1 \; ; \to 0}$

$\rightarrow p \leq 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge

$\rightarrow p > 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$ WTF.

$\rightarrow$ Problema de Basilea, Euler.

$\rightarrow$ 3B1B, youtube

$\rightarrow$ 3 blue 1 brown.

---

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$n^k < k^n < n!$

$\log(n) < k$, pero $\lim_{n\to\infty} \log(n) = \infty$.

$r < 1$

$\rightarrow \sum r^n$ converge

$\rightarrow$ Criterio de la Raiz.

Pero primero: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{(\log(n+1))^{n+1}}}{\frac{1}{(\log n)^n}}$

$$= \frac{(\log(n))^n}{(\log(n+1))^{n+1}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^n}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log(n+1)}}_{\to 0}$$

difuso

Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$ o ∞	El criterio no concluye nada si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = 1$

Es perfecto para este caso!

$$a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\log(n)} \to 0$$

Luego converge.