Martes 31 de Mayo

En esta sección del curso, nos interesará más verificar si las expresiones en cuestión convergen o no. El cálculo de estos valores es un tópico mucho más complejo y especializado.

A continuación se enunciarán los criterios más útiles para probar la convergencia o no de las series. Vale considerar que, de ahora en tanto:

- a_n y b_n denotan sucesiones reales cualesquiera,
- $A_m = \sum_{n=1}^{m} a_n,\ B_m = \sum_{n=1}^{m} b_n;$
- si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ existe, se dice que A_m converge absolutamente e implica la convergencia de A_m;
- las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ se denominan *series alternantes*; por último
- $A = \lim_{m\to\infty} A_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ B = \lim_{m\to\infty} B_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si tales límites existen.

A continuación los criterios de convergencia más famosos (y útiles). En la literatura se pueden encontrar muchos más, pero en consideración de los objetivos del curso nos ceñiremos al uso de estos.

- **Condición cero:** Si A existe, entonces $a_n \to 0$.
- **Criterio de comparación 1:** Si $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existe y $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también existe. Recíprocamente, si A no existe entonces B tampoco existe.
- **Criterio de comparación 2:** Si a_n y b_n son positivas y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ con $c \in \mathbb{R}$, A existe si y sólo si B existe.
- **Criterio del cociente:** Si a_n es positiva y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ con $r \in \mathbb{R}$:
  - si $r > 1$, A no existe,
  - si $r < 1$, A existe y
  - si $r = 1$, no es posible asegurar la convergencia de A.
- **Criterio de la integral:** Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}^+$ una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo n, entonces A existe si y sólo si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ existe.
- **Criterio de Leibniz:** Dada una serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, esta converge si a_n es decreciente y $a_n \to 0$.

Determinar si las siguientes series convergen o no.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n!)}{n!+n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!+1)}{\sqrt{2n-1}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}}{6n^2+3n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$