Martes 10 de Mayo

La búsqueda de antiderivadas de cocientes polinomiales no es trivial. Al examinar el caso en que el denominador tiene un grado mayor al numerador, se pueden aplicar métodos de reducción de exponente vistos en Álgebra y Geometría II: el método de fracciones parciales.

Lo anterior viene de suponer que una fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios reales tal que $Q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \dots q_k(x)$ con $q_i(x)$ raices de grado a lo sumo 2 de $Q(x)$, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x)} = \frac{a_1(x)}{q_1(x)} + \frac{a_2(x)}{q_2(x)} + \ldots + \frac{a_k(x)}{q_k(x)},$$

con polinomios $a_i(x)$ a determinar por métodos algebraicos, los cuales deben ser de grado a lo sumo 1.

Resulta muy sacado del bolsillo, pero si pensamos en los enteros p, q y la fracción $\frac{p}{q}$ tal que es resultado de

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q_1 q_2}$$

con q_1 y q_2 divisores de q, tiene todo el sentido del mundo.

Precisamente esa es la idea que está tras las fracciones parciales; una fracción de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone como suma de fracciones con los divisores $q_i(x)$ de $Q(x)$ en los denominadores. Esto es tremendamente útil al integrar, ya que por el **Teorema Fundamental del Álgebra** todos los polinomios reales se pueden descomponer en polinomios de grado 2 y las fracciones con polinomios de grado 2 en el numerador son sencillas de integrar.

A modo de ejemplo, en $\frac{1}{x^2-1}$, el numerador se descompone en $(x-1)(x+1)$, luego suponemos que existen a, b tales que:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1},$$

donde se puede determinar sencillamente que $a = 1/2$ y $b = -1/2$.

Ejercicio: Verificar que $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$.

Integrar la siguientes fracciones polinómicas:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1} dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6} dx$

3. $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3} dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2} dx$

6. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)(\cos(x)-1)} dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{(a+bx)^2} dx$

8. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-2x+1} dx$

9. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2-3x+7}{x^3-3x^2+3x-1} dx$

10. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-16e^x+55} dx$