Martes 3 de Mayo

Hoy se revisarán integrales (y cuando digo integrales quiero decir antiderivadas) que no resultan por simple inspección. Para resolverlas se usarán principalmente dos métodos: **cambio de variable inverso** e **integración por partes**.

El **cambio de variable inverso** viene de suponer que la variable respecto a la cual se integra (por lo general x, denotada por dx) es ya una función que depende de una nueva variable t, a diferencia del caso en que se identificaba una función $u(x)$ y $u'(x)$. Básicamente, es el teorema del cambio de variable pero al revés:

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)dx = \int_a^b f(x(t))x'(t)dt.$$

A modo de ejemplo, vale revisar la integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

con el cambio de variable $x(t) = \text{sen}(t)$, luego $dx = \cos(t)dt$. Para hacer coincidir los límites de integración, si $x = 0$ entonces $t = 0$ y si $x = 1$ entonces $t = \pi/2$. **Notar que para hacer este cambio de variable, la función debe ser invertible en el intervalo de integración**. Reemplazando se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\text{sen}^2(t)}\ \cos(t)dt,$$

pero si t está en $[0, \pi/2]$, resulta que $\sqrt{1-\text{sen}^2(t)} = \cos(t)$, luego la integrar resulta ser

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt,$$

que ya sabemos integrar por métodos tradicionales.

Vale destacar que en este caso en particular había un intervalo de integración dado. Si no se tiene tal intervalo, se debe escoger e indicar un intervalo en donde la función tenga inversa y la antiderivada resultante será válida en él. Retomando el caso anterior, el intervalo de integración válido es de $[-\pi/2, \pi/2]$ y la función resultante es antiderivada en $]-\pi/2, \pi/2[$.

Para el caso de **la integración por partes**, vale tener presente la siguiente identidad:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'.$$

Recordar que la notación *prima* (f') indica derivadas respecto al argumento de las funciones en cuestión. Luego se tiene que

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b$$

en algún intervalo $[a, b]$, de donde resulta la siguiente identidad:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Esta igualdad no resalta su poder por sí misma; su utilidad recae en que a veces, al integrar el producto de dos funciones (f' y g) , es más fácil integrar *la integral de una* (f) por *la derivada de la otra* (g'). A modo de ejemplo, con $\displaystyle\int \cos(x)x\ dx$, x juega el rol de $g(x)$ y $f'(x) = \cos(x)$; luego $g'(x) = 1$ y $f(x) = \text{sen}(x)$, de donde resulta

$$\int \cos(x)x\ dx = \text{sen}(x)x - \int \text{sen}(x)dx,$$

donde la última integral es directa. Si se toma $f'(x) = x$ y $g(x) = \cos(x)$, las cosas se complican.

Ejercicio: Verificar que $\text{sen}(x)x + \cos(x)$ es antiderivada de $\cos(x)x$.

Calcular las siguientes integrales.

1. $\int \sec(x)dx$

2. $\int xe^x dx$

3. $\int x\ln(x)dx$

4. $\int \sec^3(x)dx$

5. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

6. $\int \sqrt{x^2-1}dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

8. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

9. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$

10. $\int e^x\cos(x)dx$

11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

12. $\int x\sec(x)\tan(x)dx$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x}}dx$

14. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}dx$

15. $\int \cos^3(x)dx$

16. $\int \operatorname{sen}^3(x)dx$