# Martes 12 de Abril

En esta sesión, además de resolver el control, se revisarán teoremas que serán útiles para probar el teorema fundamental del cálculo.

**Teorema del Valor Medio (TVM):** Si $f$ es una función derivable sobre $(a, b)$ y continua en $a$ y $b$, entonces existe $\xi \in ]a, b[$ tal que:

$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Por otro lado, si $f$ no alcanza a ser derivable pero es integrable sobre $[a, b]$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f.$$

Notar que si $f$ es derivable, cumple ambas condiciones.

**Teorema Fundamental del Cálculo (TFC):** Si $f$ es una función integrable en todo intervalo cerrado contenido en su dominio, se puede definir $F$ sobre el mismo dominio de $f$ como

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Ahora bien, si $f$ es continua, $F$ es derivable y

$$F'(x) = f(x).$$

1. Con $f(x) = x - x^2$, usar Taylor para expresar a $f$ como una suma de potencias de $(x-1)$. Luego, probar que es integrable y calcular $\int_0^2 f$.
2. Probar que si dos funciones $f$ y $g$ con dominio común $D$ son derivables en $I \subset D$ tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces
$$f(x) = g(x) + C$$
con $C \in \mathbb{R}$ para todo $x \in I$
3. Sea $F(x) = \int_c^x f$, probar que
$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$
4. Mediante el teorema fundamental del cálculo en su primera forma, calcular la derivada de las siguientes funciones:

*a)* $A(x) = \int_a^x \operatorname{sen}(t)dt$

*b)* $B(x) = \int_b^{x^2} \operatorname{sen}(t)dt$

*c)* $C(x) = \int_c^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \operatorname{sen}(r)dr$

*d)* $D(x) = \int_d^{tan(x)} \tan(\alpha)d\alpha$

*e)* $E(x) = \int_e^{\exp^{-1}(x)} \exp(y)\ dy$

*f)* $F(x) = \int_f^{x^3} (s^3 - s^2 + s - 1)ds$

*g)* $G(x) = \int_g^{x^3} \frac{1}{1+p}dp$

*h)* $H(x) = \int_{x^2}^h \cos(c)dc$