Martes 5 de Abril

En esta ayudantía, vale considerar las siguientes propiedades de la integral. La demostración de las mismas quedan de ejercicio. Sean f y g integrables sobre $[a, b]$, entonces

- **Linealidad**, con $c \in \mathbb{R}$:
$$\int_a^b f + cg = \int_a^b f + c \int_a^b g$$
- **Aditividad**, con $c \in [a, b]$:
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
- **Positividad**, con $f \leq g$:
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

También, consideraremos las siguientes expresiones como equivalentes:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\alpha)d\alpha,$$

con la sutileza de que, en la segunda expresión (y las que le siguen), lo que se encuentra en el argumento de f está relacionado con la muestra ξ_i de la partición $\mathcal{P} = \{t_i\}$ y el dx se relaciona con el tamaño del intervalo $[t_i, t_{i-1}]$ que contiene a ξ_i. Por lo anterior, expresiones del tipo

$$\int_a^b f \ , \quad \int_a^b f(ct)dt$$

con $c \in \mathbb{R}$, podrían ser distintas. La primera se puede expresar tradicionalmente como un límite de sumas de Riemann, pero la segunda, con ξ_i muestra de la partición $\mathcal{P} = \{t_i\}$ indica

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(ct)dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c\xi_i)(ct_i - ct_{i-1}), \text{ considerar } \mathcal{P}' = \{ct_i\} \\
&= \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(t')dt' \\
&= \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f.
\end{aligned}$$

1. Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ es integrable, calcular $\int_0^1 f$, $\int_0^2 f$ y $\int_1^3 f$, con f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 2 \\ 1, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

2. Probar la siguiente identidad:

$$\int_{ac}^{bc} f(t)dt = \int_a^b cf(ct)dt$$

(Hint: considerar una partición $\mathcal{P} = t_i$ del intervalo $[a, b]$ y notar que $\mathcal{P}' = ct_i$ es una partición de $[ac, bc]$)

3. Sean f y g una función par e impar respectivamente, ambas integrables sobre $[-a, a]$. Probar que

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$$

y que

$$\int_{-a}^{a} g = 0$$

4. Calcular $\int_0^1 f$, con $f(x) = x^2 - x + 1$, $f(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = -x^3 + 1$.

5. Calcular $\int_{-3}^{3} \text{sen}$. Si $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos = 1$, calcular $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos$.

6. Probar que, si $|f|$ es integrable, entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$