Martes 22 de Marzo

1. Calcular el polinomio de Taylor de orden $n = 7$ centroado en $a = 0$ para las funciones:

   a) $\cos(x)$

   b) $\operatorname{sen}(x)$

   c) $\tan(x)$

   d) $\exp(x)$

   e) $\ln(1 + x)$

2. El resto $R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$ del polinomio de Taylor de f orden n centrado en a corresponde al error que se comete cuando la función $f(x)$ es aproximada por $P_{n,a}(x)$ en x. Notar que si $x \to a$, entonces $R_{n,a}(x) \to 0$, ¿pero qué pasa con $R_{n,a}(x)/x$ si $x \to a$? Peor aún, ¿con $R_{n,a}(x)/x^b$, siendo $b < n \in \mathbb{N}$? **Por ahora asumiremos que ambas expresiones tienden a cero**. Al final del curso probaremos estos resultados. Usando el polinomio de Taylor, calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\pi x)-1}{x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(2x)-1}{x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$

   (En el último caso, ¿se cumple $\lim\limits_{x\to 0} R_{n,a}(x) = 0$?)

3. Considere la serie geométrica sobre r dada por:

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + ... + r^n = \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

   Considerando también la unicidad del polinomio de Taylor, calcular explicitamente $P_{n,0}$ y $R_{n,0}$ para las siguientes funciones de x:
   (HINT: no derive, use la suma geométrica. Sin embargo, usar las derivadas es un buen ejercicio para confiar en la suma geométrica y convencerse de la unicidad del Taylor)

   a) $\frac{1}{1-x}$

   b) $\frac{1}{1+x^2}$