Martes 29 de Marzo

En los siguientes problemas, vale recordar la forma de Lagrange del Resto de Taylor:

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde f es una función de interés con $n+1$ derivadas, P_{n,x_0} es su polinomio de Taylor de orden n centrado en x_0 y ξ es un número entre x y x_0.

Para los problemas posteriores al 3, se requiere el uso del siguiente resultado: la unicidad del polinomio de Taylor.

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio de grado menor o igual que n tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

entonces $P(x)$ es el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en x_0. La demostración de este teorema se puede encontrar en el capítulo 11 del libro *Cálculo* de Joseph Kitchen. Involucra el uso de la inducción y la regla de L'Hôpital, de manera que resulta ser un buen ejercicio para estudiantes del curso de Cálculo II.

1. Mostrar que si $x > 0$, entonces se cumple

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

2. Mostrar que si $x > 0$, entonces se cumple

$$\left| \sqrt[3]{1+x} - \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{9}\right) \right| \leq \frac{5x^3}{81}.$$

3. Sean $f(x) = \exp(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$. Probar que $R_{n,x_0}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ en ambos casos.

4. Considerando el Polinomio de Taylor de las últimas funciones de la ayudantía anterior, Calcule la derivada 100 y 1000 de las funciones $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. ¿Qué certeza tiene usted de que la serie hallada en la ayudantía anterior es el polinomio de Taylor de las funciones precedentes?

5. Considere la función $h(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$. Calcule la derivada 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 y 2023. (Hint: use la serie geométrica con $r = -x^6$. Tras esto, multiplique por x^5)