

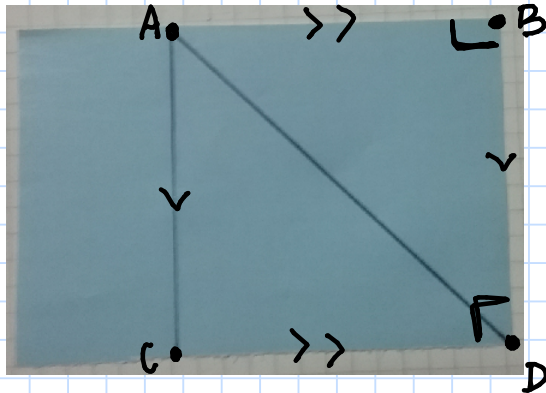
A Y U D A N T Í A G E O M E T R Í A

11 ABR 2021

PROBLEMA 1

Construya con papel y pruebe :

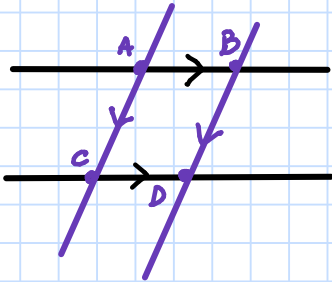
a) Un cuadrado a partir de un rectángulo (PD) # ABCD cuadrado



Deriva directamente del teorema de las paralelas.

OJO con la notación $\rightarrow$

TEOREMA DE LAS PARALELAS:



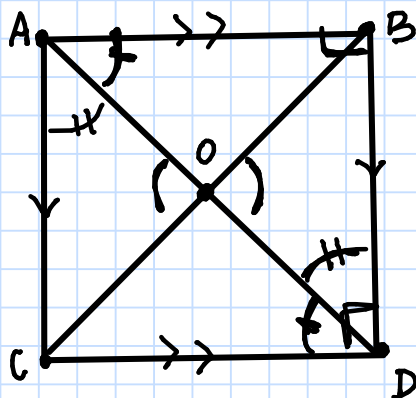
Si tenemos $e \parallel e'$ y $m \parallel m'$ como muestra la figura

$$\Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD}$$

Primero notemos que como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Ahora basta con probar que los $\angle$ os son rectos, como originalmente teníamos un rectángulo $\angle ABD \cong \angle BDC \cong R$ y como

Vamos a hacer la otra diagonal



Notemos $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (LLL)

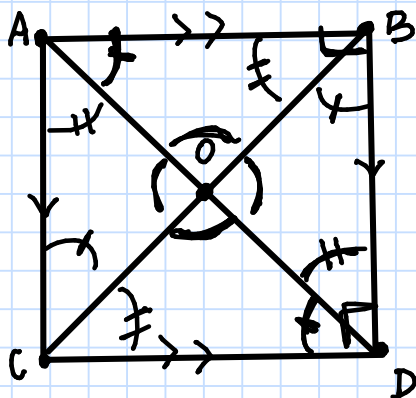
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (teo paralela)
- $\overline{BD} \cong \overline{AC}$ (" ")
- $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (mismo lado)

en particular $\angle DAC \cong \angle ADB$ *

luego, $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ (ALA)

- $\angle OAC \cong \angle ODB$ (por *)
- $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (teo paralelas)
- $\angle ACO \cong \angle DBO$ (completa $\angle$ en $\triangle$)

De manera equivalente los otros 2 triángulitos, con eso tenemos



Finalmente $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ (ALA)

un $\angle$ en común +
el $\angle$ de medio (comparten
el lado $\overline{AO}$ + $\angle$ de el
medio (para sumar $\angle$))

$\Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{AB}$ (equivalente $\overline{CD} \cong \overline{BD}$)

Con esto tenemos un paralelogramo de
lados iguales, puede ser



rombo

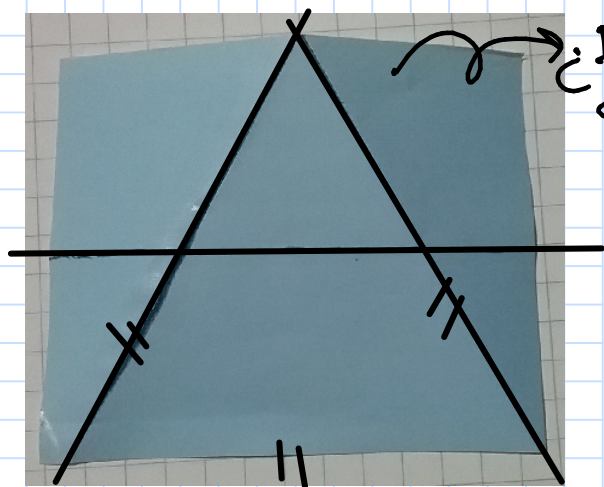


cuadrado

pero en un paralelogramo
los $\angle$ opuestos son equi-
valentes q como $\angle ABD = \angle$

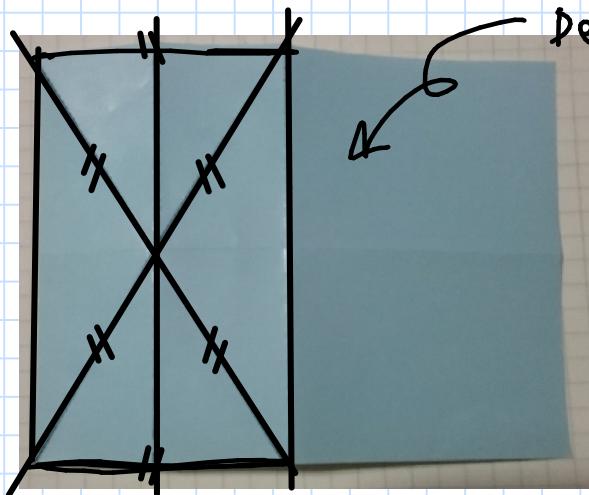
$\Rightarrow \angle ACD = \angle$ (lo mismo los
otros 2)

b) Un triángulo equilátero a partir de un rectángulo

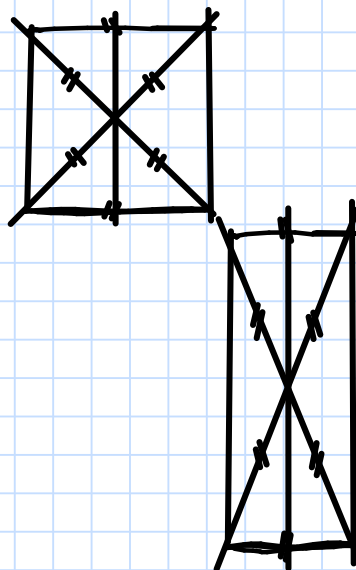


Desafío ; cómo demostrarlo ?

c) Dos triángulos equiláteros a partir de un rectángulo

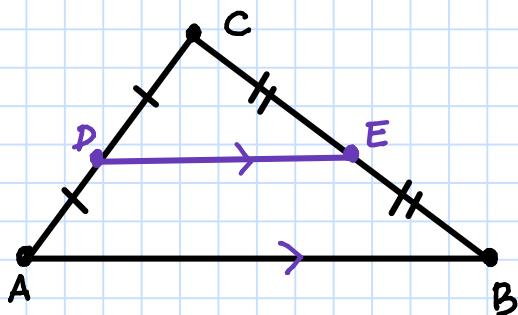


demostrable
ojo con



PROBLEMA 2

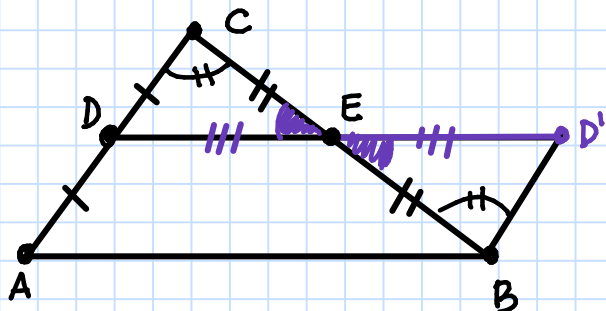
(Prueba 1 2018) Sea el triángulo ABC con D punto medio de AC, y E punto medio de CB. Demuestre que la recta DE es paralela a AB



$$\text{Hip} \begin{cases} \overline{CD} \cong \overline{AD} \\ \overline{CE} \cong \overline{BE} \end{cases}$$

$$\text{PD} \mid \overline{DE} \parallel \overline{AB}$$

Vamos a copiar $\overline{DE}$ en la extensión de esta, formando $\overline{DE'}$, luego uniremos $\overline{D'B}$



$$2.) \triangle DCE \cong \triangle D'BE \quad (\text{LAL})$$

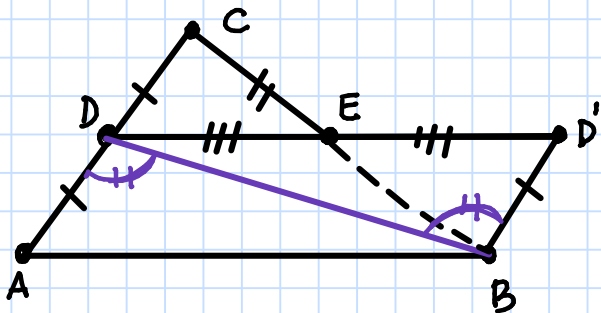
- $\angle DEC \cong \angle D'EB$ (opuestos por el vértice)
- $\overline{DE} \cong \overline{D'E}$ (por construcción)
- $\overline{CE} \cong \overline{BE}$ (por hipótesis)

En particular los $\angle DCE \cong \angle D'BE$

Pero si estos $\angle$ 'os son iguales y están dentro de las rectas prolongadas de $\overline{CA}$ y $\overline{D'B}$ cortadas por $\overline{CB}$ son alternos internos

$$\Rightarrow \overline{CA} \parallel \overline{D'B} \quad (1)$$

Pero a demás si trazamos $\overline{DB}$



Notemos que

b.) $\triangle ADB \cong \triangle D'DB$ (ALA)

- $D'B \cong DA$ (por parte a.) + hipótesis)
- $\angle ADB \cong \angle D'BD$ (alternos internos)
- $\overline{DB} \cong \overline{DB}$ (mismo lado)

$\Rightarrow$ en particular $\overline{DD'} \cong \overline{AB}$ y como son segmentos que miden lo mismo entre paralelas $\Rightarrow$ Son paralelos



ejercicio | mostrar que si $\overline{AD} \cong \overline{DC}$
y $\overline{DE} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{CE} \cong \overline{EB}$

(OBS) $\overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{2}$

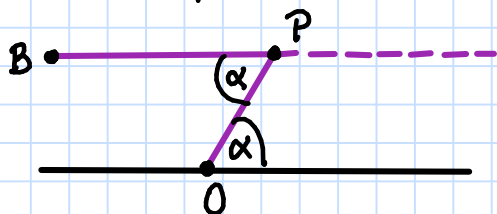
pues $\overline{DD'} = \overline{AB}$ (por teo paralelas)

y E punto medio de $\overline{DD'}$ (construcción)
 $\Rightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{DD'}}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{2}}$$

(Tarea 1 2020) Dada una recta l y un punto P (que no pertenece a l), existe una única recta m paralela a l y que pasa por P

Primero recordemos como trazar una recta paralela a l que pase por P



Primero trazamos una recta desde P hasta un punto cualquiera de l digamos O .

Entre $\overline{OP}$ y l se forma un ángulo α , lo copiamos en P al lado izquierdo, obteniendo un segmento $\overline{BP}$

Extendemos $\overline{BP}$ obteniendo la recta m , paralela a l , pues si vemos el ángulo suplementario de α , α' ($\alpha + \alpha' = 2R$) y comparamos los ángulos al lado izquierdo del semiplano formado por $\overline{OP}$ tenemos

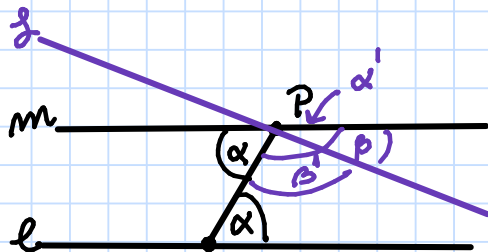
$$\alpha' + \alpha = 2R \Rightarrow m \parallel l$$

$\hookrightarrow$ prop 5.

Ahora, debemos mostrar que cualquiera sea el α (tomamos un punto distinto a O para formarlo) la recta m será la misma.

Supongamos existe otra recta $g \neq m$ tal que $g \parallel l$ y g pasa por P

Si $m \neq l \Rightarrow$ existe un ángulo β entre ellas tq' $\beta < \alpha'$ pues β es parte de α (principios generales).



Sea $\beta + \beta' = \alpha'$ (1) Ahora, $\beta' + \alpha = 2R$ (2) pues $l \parallel l$ y son internos y en el mismo semiplano

Pero $\alpha + \alpha' = 2R$ (3)

De (1) en (3) tenemos $\alpha + (\beta + \beta') = 2R$ (4) Porque $m \parallel l$ y son α' los internos en el mismo semiplano.

Pero en (2) y (4) tenemos una cantidad igual (α) que junto a algo suman una cantidad igual ($2R$) por principios generales

$$\Rightarrow \beta' = \beta + \beta'$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \quad \text{---} \times$$

pues esto nos dice que no existe β , i.e. $m = l$ pues no hay un $\angle$ entre ellas y como compar-
ten un punto (no son paralelas)

$\Rightarrow$ son la misma recta

□

OBS el caso en que l va al otro lado es análogo pero con α' en l vez de α

