

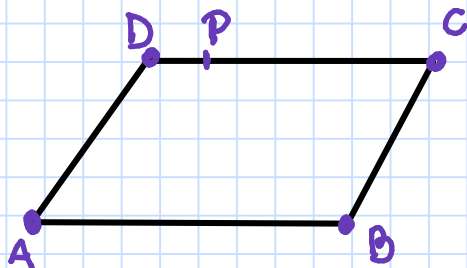
A Y U D A N T Í A G E O M E T R Í A

Uale M.

19 ABR 2021

PROBLEMA 1

Si P es un punto sobre los lados de un paralelogramo, ¿es posible determinar una recta que pase por él para dividir la región paralelogramática en 2 regiones equivalentes?



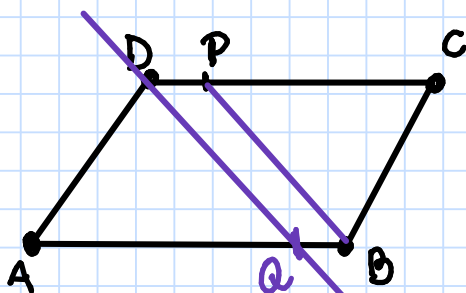
Observemos la situación.
(siempre construir la figura más "fea")

→ romboide

Ojo: P puede estar en cualquiera de los lados y notamos es equivalente dibujarlo en $\overline{DC}$ (como la figura) o en cualquier otro lado

1. trazamos $\overline{PB}$

2. trazamos la paralela a $\overline{PB}$ que pasa por P



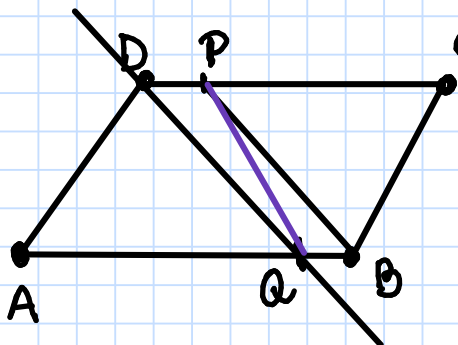
esta paralela corta al segmento $\overline{AB}$ en un punto, digamos Q

Notamos $\triangle ADQ \cong \triangle BPC$ (LAL)

- $\overline{DA} \cong \overline{CB}$ (pues $\# ABCD$ paralelogramo)
- $\angle DAQ \cong \angle PCB$ (pues $\# ABCD$ paralelogramo)
- $\overline{DQ} = \overline{PB}$ (pues $\# DPQB$ paralelogramo)

pero necesitamos P

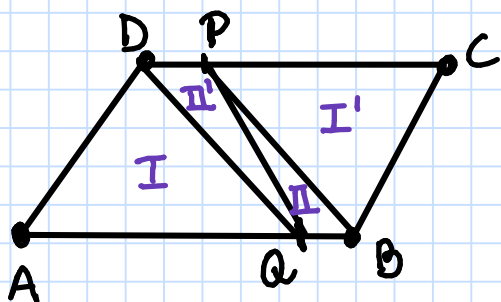
Ahora trazamos $\overline{PA}$ (equivalente a $\overline{DB}$)



C Notamos $\triangle DQP \cong \triangle PQB$ (LL)

- $\overline{DP} \cong \overline{QB}$ (pues $\#$ $DPQB$ paralelogramo)
- $\overline{DQ} \cong \overline{PB}$ (pues $\#$ $DPQB$ paralelogramo)
- $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$ (mismo lado)

Así si notamos, las regiones



$$\begin{cases} I \cong I' & (1) \\ II \cong II' & (2) \end{cases}$$

y si sumamos (1) y (2)

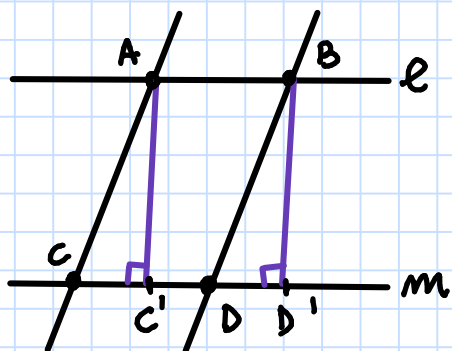
$$I + II \cong I' + II'$$

$\therefore$ La recta prolongación de $\overline{PQ}$, que pasa por P . Divide al paralelogramo en 2 regiones equivalentes.



PROBLEMA 2

Construya una región cuadrada equivalente a una región paralelogramica dada



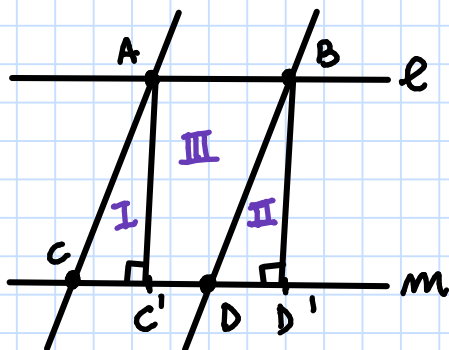
Primero, sabemos que construir una región rectangular a la región $\#ABCD$ es bastante simple.

Trazamos las perpendiculares a l y m desde A y B

Notamos que $\triangle ACC' \cong \triangle BDD'$ (LAL)

- $\overline{AC'} \cong \overline{BD'}$ (pues $\#ABC'D'$ paralelogramo)
- $\angle C'AC \cong \angle D'BD$ (trazando $\overline{AD}$ (LLL) + op por vértice)
- $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (pues $\#ABCD$ paralelogramo)

Ahora, si numeramos las regiones notamos que como



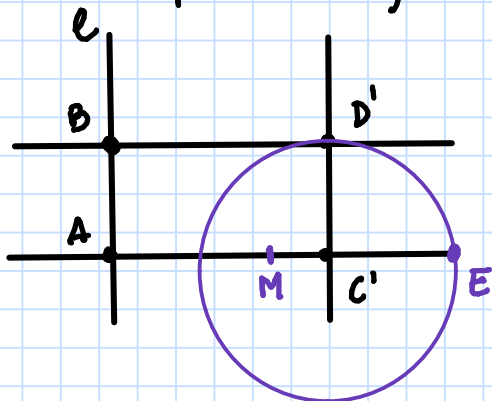
$I \sim II$ y III es una región compartida

$$\Rightarrow \#ABCD \sim \#ABC'D'$$

Ahora, podemos construir una región cuadrada equivalente a $\#ABC'D'$ (y por principio de transitividad a $\#ABCD$)

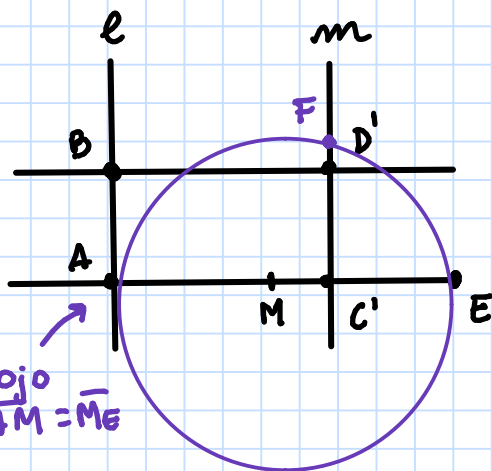
Vamos a girar la figura solo por comodidad (la rotación define congruencia)

En primer lugar construiremos la región



tracemos un círculo con centro en C' y radio $\overline{C'D'}$, extendemos $\overline{AC'}$ hasta donde chocha el círculo, en E .

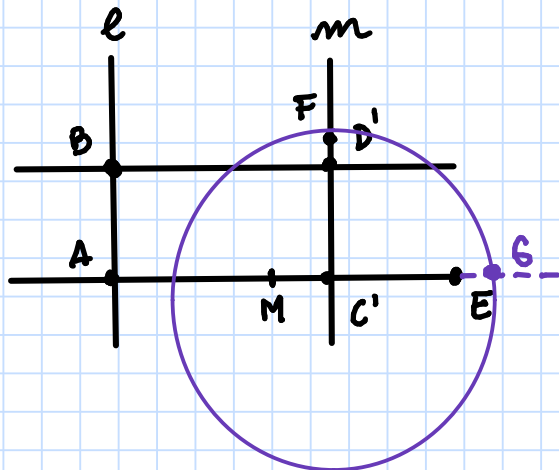
Ahora encontremos el punto medio M de $\overline{AE}$



Trazamos ahora otro círculo con centro en M y radio $\overline{ME}$

El punto donde corta a m , lo llamaremos F .

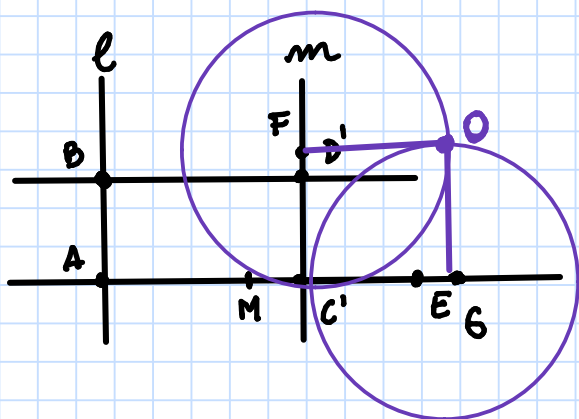
Ahora, trazamos un círculo con centro C' y radio $\overline{C'F}$



En donde esta circunferencia corta a la extensión de $\overline{AC'}$ tomaremos el punto G

Notemos $\overline{FC'} = \overline{C'G}$
(ambos radios)

Finalizando la construcción debemos trazar 2 circunferencias más, una con centro F y radio $\overline{FC'}$, y otro de centro G y radio $\overline{C'G}$



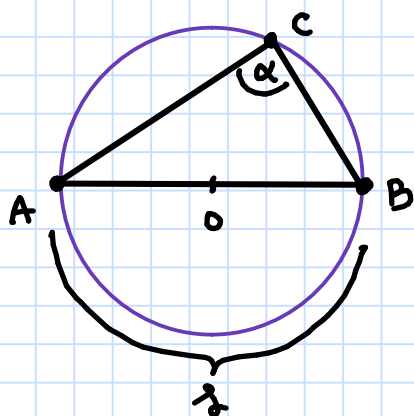
La intersección (que no es C') de estos círculos, la llamaremos O

Si trazamos $\overline{FO}$ y $\overline{GO}$, tendremos nuestra región cuadrada.

Ahora debemos demostrar que efectivamente $\# ABC'D' \sim \# C'FGO$.

Pero antes un lemita.

[LEMA] Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



$$\alpha = ?$$

Sabemos α es la mitad del arco que inscribe s , pero s es la mitad de la circunferencia

$$\Rightarrow s = 2R$$

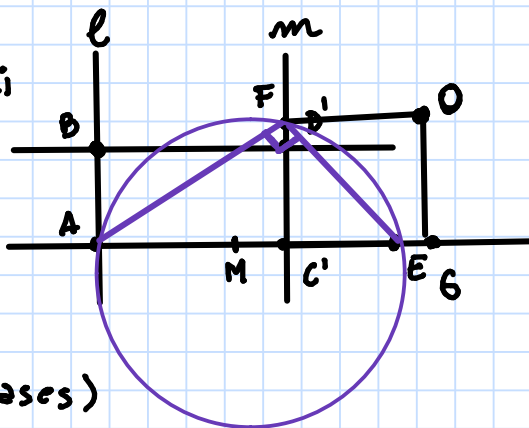
$$\Rightarrow \alpha = \frac{2R}{2} \Rightarrow \alpha = R$$

$\therefore$ El lema se cumple para cualquier triángulo

Volviendo al problema,

Veamos que la circunferencia con centro en M y radio $\overline{ME}$ corta en F (como construimos) y en A (pues A punto medio $\Rightarrow \overline{MA}$ radio).

$\Rightarrow \triangle AFE$ es rectángulo por Lema, está inscrito en una semicircunferencia.



Ahora, los Δ 'os

$$AC'F \sim \Delta EC'F$$

↳ por teorema de euclides (proxima semana / clases)

Luego $\frac{\overline{C'E}}{\overline{C'F}} = \frac{\overline{C'F}}{\overline{C'A}}$ porque los Δ 'os son equivalentes

Ahora el lado del cuadrado es $\overline{CF}$, entonces

$$\overline{C'E} \cdot \overline{C'A} = \overline{C'F} \cdot \overline{C'F}$$

Pero $\overline{C'E} = \overline{C'D'}$ por construcción

$$\Rightarrow \overline{C'D'} \cdot \overline{C'A} = \overline{C'F} \cdot \overline{C'F}$$

Pero $\overline{C'D'} \cdot \overline{C'A'}$ es el área de $\#ABC'D'$ y $\overline{C'F} \cdot \overline{C'E'}$ es el área de $\#C'D'GO$

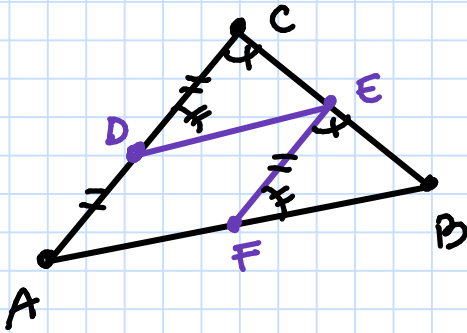
$\Rightarrow$ Son equivalentes $\#ABC'D' \sim \#C'D'60$

$$\therefore \#ABCD \sim C'D'60$$



EJERCICIO AYUDANTÍA ANTERIOR

Por el punto medio de un triángulo se traza la paralela a un lado de este, entonces esa paralela corta al otro lado en su punto medio



Construimos la figura

$$\underline{PD} \mid \overline{CE} \cong \overline{EB}$$

Trazamos la paralela
a $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

#ADEF es paralelogramo

Por ALA*, los Δ 'os $\Delta DCE \cong \Delta FEB$

$$\therefore \overline{CE} \cong \overline{EB}$$

* ALA En los lados y ángulos
marcados

PROBLEMA 3

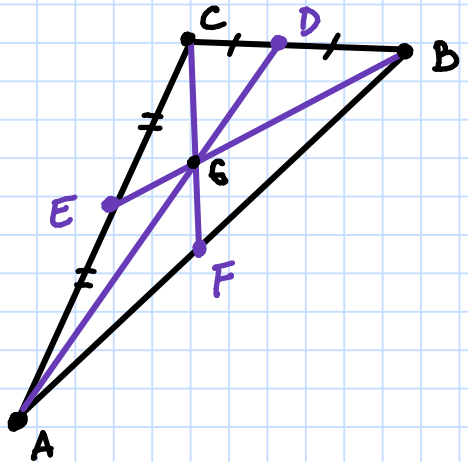
Demuestre que las transversales de gravedad de un triángulo son rectas concurrentes

Sabemos que 2 rectas distintas que salen de un vértice de un Δ concurren.

Supongamos s.p.g.

$\overline{EB} \times \overline{AD}$

$\hookrightarrow$ concurre con



PD] $\overline{CF}$ concurre con $\overline{EB}$ y $\overline{AD}$

Pero podemos hacer lo que hicimos en la ayudantía 1

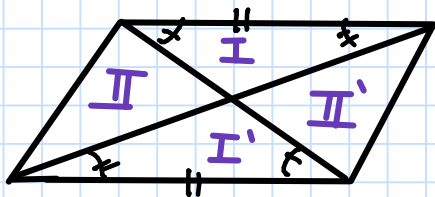
Tracemos la recta $\overline{CF}$ tal que $\overline{CF}$ pase por G el punto de concurrencia de las otras 2 transversales.

PD] $\overline{CF}$ es transversal de gravedad (i.e. $\overline{AF} \cong \overline{BF}$)

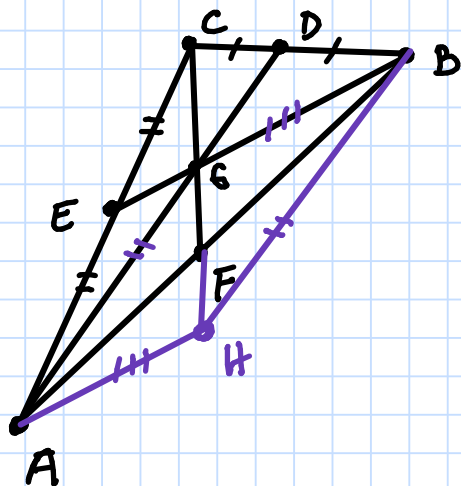
Sabemos que en un paralelogramo ocurre lo siguiente

$$\begin{cases} I \cong I' \\ II \cong II' \end{cases} (*)$$

→ ALA como se muestra en la figura



Trazamos así $\overline{AH} \parallel \overline{EB}$ y extendemos $\overline{CF}$ a $\overline{CH}$.



Sabemos por lo demostrado anteriormente que como trazamos paralelas trazamos $\overline{HB} \parallel \overline{AG}$ pues $\overline{GH}$ corta en el punto medio

Ahora, $\#AHBG$ paralelogramo y $\overline{GH}$ con $\overline{AB}$ diagonales, así tenemos una congruencia como en (*)

$$\Rightarrow \triangle FGB \cong \triangle AFH$$

$$\Rightarrow \overline{AF} \cong \overline{FB}$$

$\therefore \overline{CF}$ transversal de gravedad