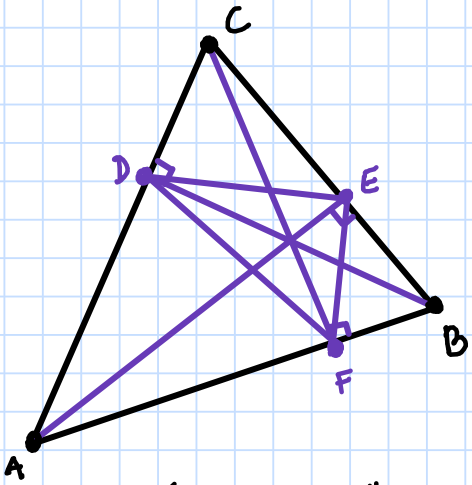
Vale M.

AYUDANTÍA GEOMETRÍA

26 ABR 2021

Problema 1

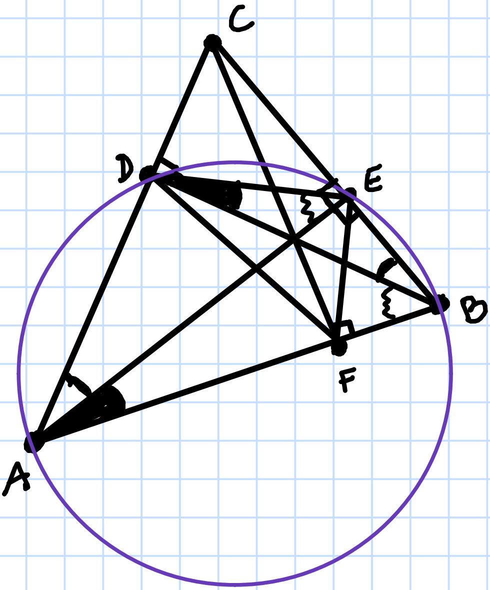
Demuestre que los pies de altura de un triángulo cualesquiera, definen un triángulo cuyas bicectrices son las alturas del primero.



Primero, dibujemos el ΔABC con alturas $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$ respectivamente, asumimos ΔABC acutángulo (SPG)

Triángulo más "feo", si fuera equilátero por ejemplo estaría listo pues las transversales de gravedad, alturas, simetrales y alturas coinciden.

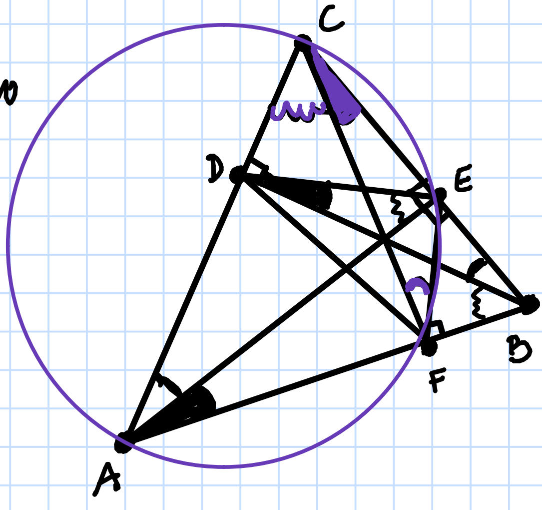
Como ΔAEB y ΔADB son triángulos rectángulos y tienen la misma hipotenusa, por ayudantía pasada (LEMA 1) podemos decir que están inscritos en la misma semicircunferencia (con $\overline{AB}$ diámetro)

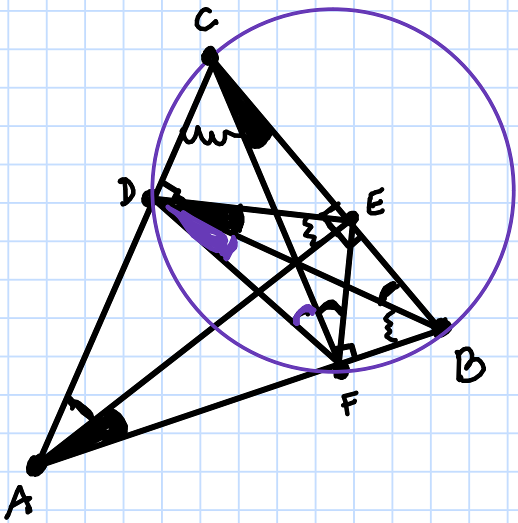


- $\measuredangle EAD \cong \measuredangle EBD$ pues describen el mismo arco $(\widehat{DE})$ ∢
- $\measuredangle BAE \cong \measuredangle BDE$ pues describen el mismo arco $(\widehat{BE})$ ∢
- $\measuredangle ABD \cong \measuredangle DEA$ pues describen el mismo arco $(\widehat{AD})$ ∢

Luego hacemos otra circunferencia, siguiendo los mismos pasos anteriores pero por los ΔAEC y ΔAFC

- $\measuredangle EAC \cong \measuredangle EFC$ pues describen el mismo arco $(\widehat{CE})$ ∢
- $\measuredangle FCE \cong \measuredangle BAE$ pues describen el mismo arco $(\widehat{EF})$
- $\measuredangle ACF \cong \measuredangle AEF$ pues describen el mismo arco $(\widehat{AF})$ ∢





Finalmente hacemos una última circunferencia

(podemos hacer completación de 2R también)

en este caso con $\triangle BDC$ y $\triangle BFC$

- $\measuredangle CFD \cong \measuredangle CBD$
  inscritos en $(\overset{\frown}{CD})$
- $\measuredangle BDF \cong \measuredangle BCF$
  inscritos en $(\overset{\frown}{FB})$
- $\measuredangle AEF \cong \measuredangle 3$
  por completación

Hay pifias con la notación pero esa es la idea owo

$$2R = 2\measuredangle + 2\measuredangle + 2\measuredangle 3 \quad \text{(triángulo grande)}$$

$$2R = 2\measuredangle + 2\measuredangle + \measuredangle 3 + x \quad \text{(triángulo chico)}$$

$$\Rightarrow x = \measuredangle 3$$

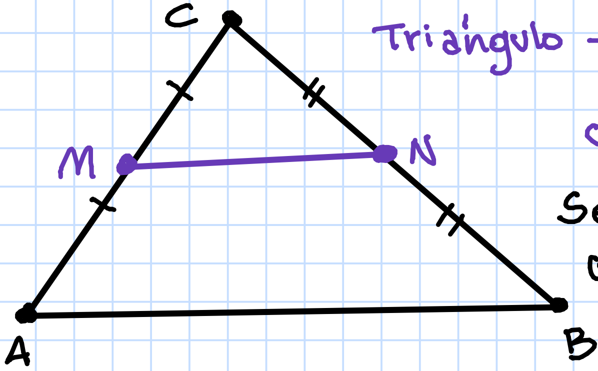
$\therefore$ Se cumple la prop.

Desafío demostrarlo sin circunferencia

(Hint: con op. por el vértice y $\measuredangle$'s cuadrilátero)

Problema 2

Construya un cuadrado equivalente a partir de un triángulo cualesquiera dado.

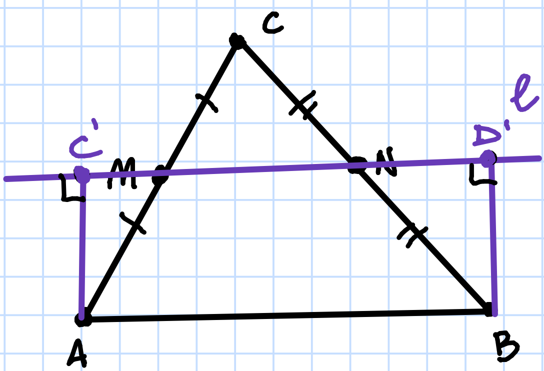


Triángulo → Rectángulo → Cuadrado

CONSTRUCCIÓN

Sea ΔABC un triángulo cualquiera.

Trazamos el punto medio de $\overline{AC}$ y el de $\overline{CB}$ (recordar como se traza). Y unimos M y N encontrando $\overline{MN}$.

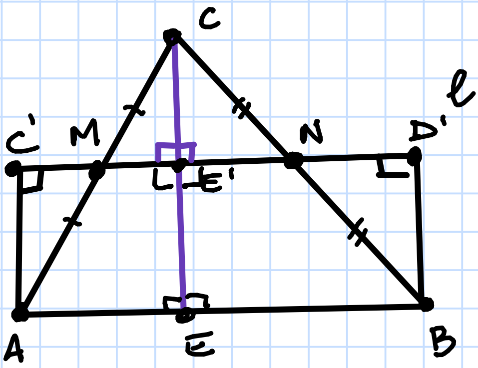


Extendemos el segmento $\overline{MN}$ a la recta ℓ.

Luego, trazamos las perpendiculares a ℓ que pasan por A y por B, estas perpendiculares cortan a ℓ en C' y D' respectivamente.

El rectángulo #ABC'D' es equivalente al ΔABC.

DEMOSTRACIÓN



Por ejercicio 2 ayudantía 2 $\overline{C'D'} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AC'} \parallel \overline{D'B}$ por formar el mismo $\measuredangle$ entre paralelas

Luego, #ABC'D' es un rectángulo

Tracemos $\overline{CE}$ altura de $\triangle ABC$ en C

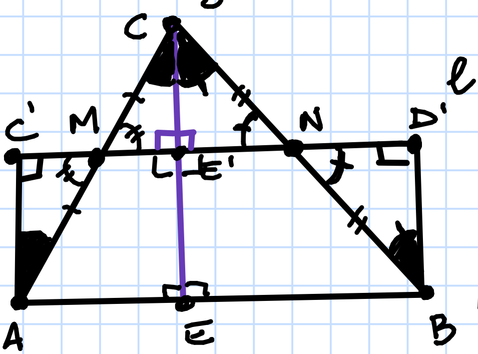
Sea E' el punto donde $\overline{CE}$ corta a C'D', al tener que $\overline{C'D'} \parallel \overline{AB}$,

Notemos que $\measuredangle D'E'E = R = \measuredangle C'E'E$ (Alternos internos)

$\Rightarrow$ $\overline{CE'}$ altura en C de $\triangle CMN$

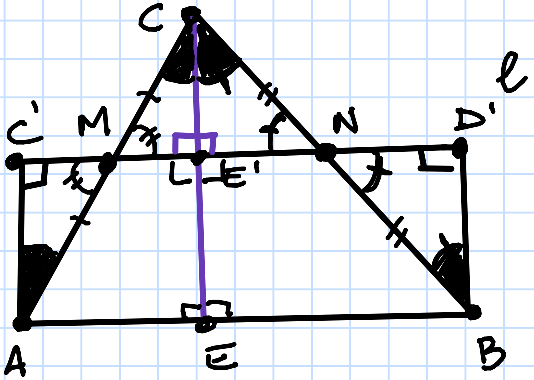
Ahora, congruencia de triángulos

Pero antes veamos los ángulos de la figura



(*)

op. por el vértice + completar 2R



$\Delta CE'N \cong \Delta BD'N$ (ALA)

- $\measuredangle D'BN \cong \measuredangle NCE'$ (*)
- $\overline{BN} \cong \overline{CN}$ (construcción)
- $\measuredangle CNE' \cong D'NB$ (*)

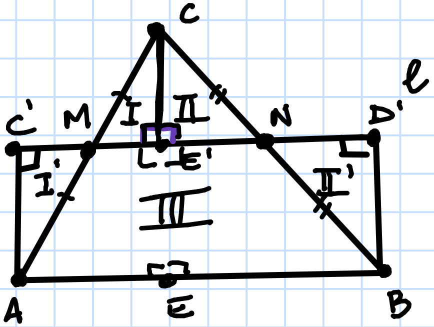
A

$\Delta C'MA \cong CML$ (ALA)

- $\measuredangle C'AM \cong \measuredangle LCM$ (*)
- $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ (construcción)
- $\measuredangle AMC' \cong LMC$ (*)

B

Finalmente de A y B tenemos las siguientes equivalencias de regiones



$$\begin{cases} I \cong I' \ (1) \\ II \cong II' \ (2) \end{cases}$$

Por (1) + (2)

$\Rightarrow I + II = I' + II'$

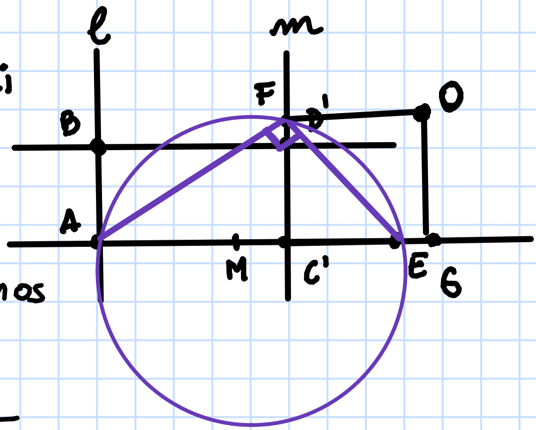
y como III es una región compartido

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \# ABC'D'$

Ahora, construimos un cuadrado a partir del rectángulo como en la ayudantía 3, (repetir demostración)

→ Aquí pegué la de la clase pasada no me

ΔAFE es rectángulo por Lema 1, está inscrito en una semi circunferencia.



Ahora, los Δ'os

Por euclides tenemos que

$$\overline{C'E} \cdot \overline{C'A} = \overline{C'F} \cdot \overline{C'F}$$

Ahora el lado del cuadrado es $\overline{C'F}$, entonces

$$\overline{C'E} \cdot \overline{C'A} = \overline{C'F} \cdot \overline{C'F}$$

Pero $\overline{C'E} = \overline{C'D'}$ por construcción

$$\Rightarrow \overline{C'D'} \cdot \overline{C'A} = \overline{C'F} \cdot \overline{C'F}$$

Pero $\overline{C'D'} \cdot \overline{C'A'}$ es el área de $\# ABC'D'$ y $\overline{C'F} \cdot \overline{C'F}$ es el área de $\# C'D'GO$

$\Rightarrow$ Son equivalentes $\# ABC'D' \sim \# C'D'GO$

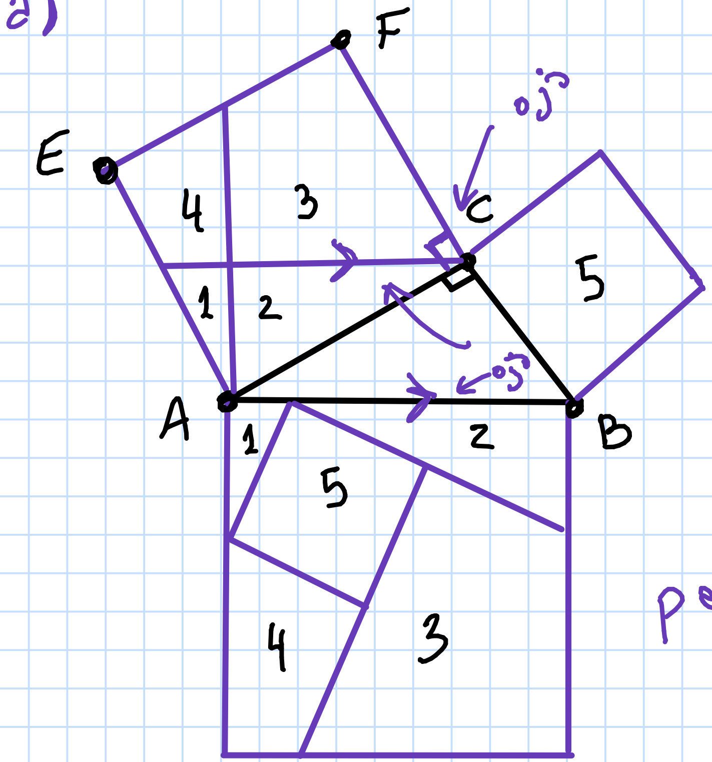
$\therefore \Delta ABC \sim \# C'D'GO$

Ejercicio 3

a) Visualice con tijera y papel el teorema de pitágoras

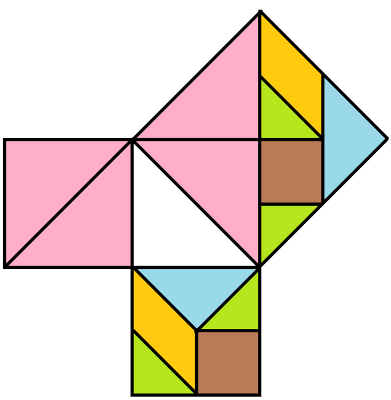
b) Demuestre de manera alternativa a la vista en clases el teorema de Pitágoras

a)

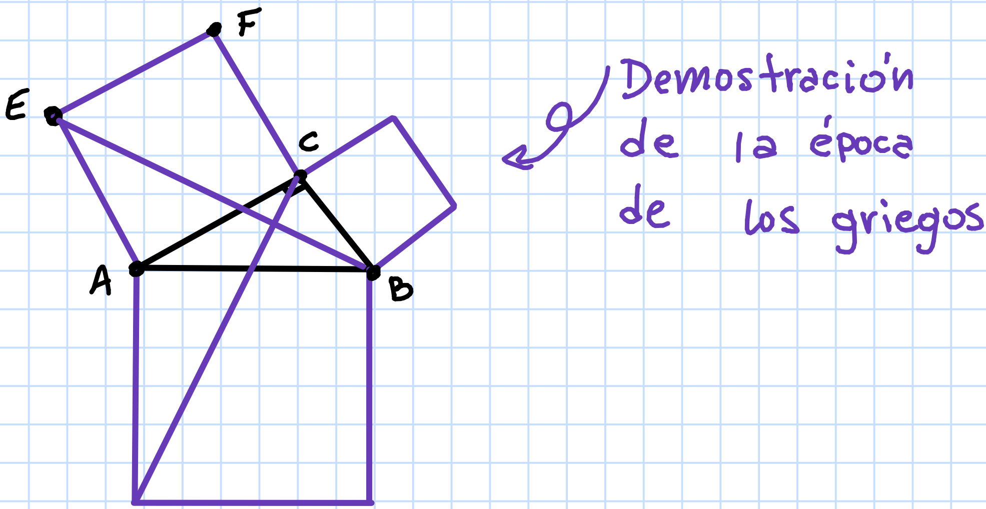


ojo! no es el mejor dibujo del mundo

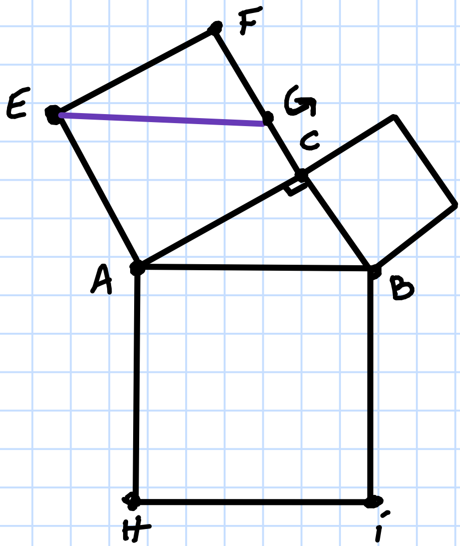
pepelitos



El teorema de pitágoras nos dice básicamente que la suma de los cuadrados formados por los catetos es igual al cuadrado por la hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera.



Nosotros lo demostraremos con paralelógramos

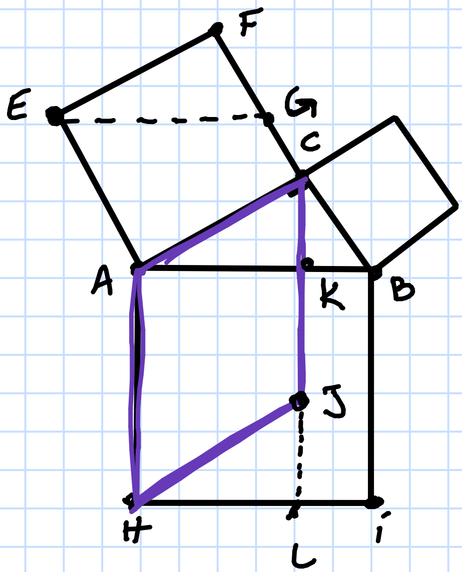


Tracemos $\overline{EF'}$ paralela a $\overline{AB}$ que corta al segmento $\overline{FC}$

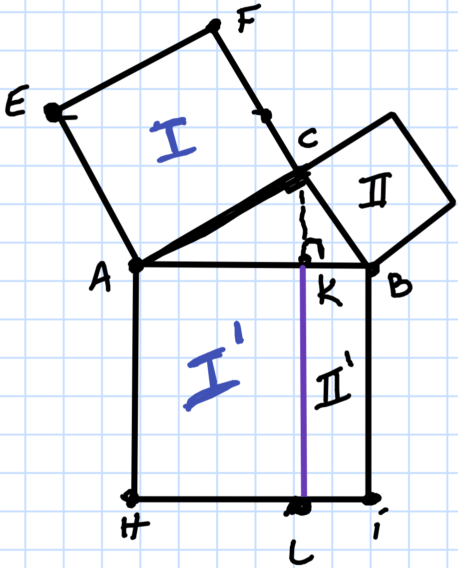
Luego $\# ACEF \sim \# ABEG$
↳ ayudantía 3

Ahora, rotaremos $\# ABEG$ (la rotación define congruencia)

y sabemos $\overline{AB} = \overline{AH}$ así que queda bien contenido



Luego volvemos a definir de la misma manera anterior El $\# AKHL \sim \# ACHJ$



Con esto comprobamos que las regiones $I \sim I'$

Hacemos el mismo procedimiento con el cuadrado chiquito,

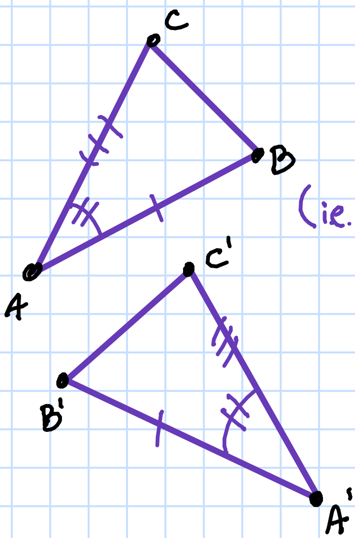
y nos aseguramos que corresponde efectivamente a II' por teorema de euclides

$$\Rightarrow I + II = I' + II'$$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$\therefore$ Queda comprobado el teorema de pitágoras.

Extra | Consulta por wsp



Lados iguales + el $\measuredangle$ que forman

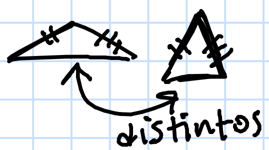
$\Rightarrow$ 3er lado igual lo es

(ie. demostración del criterio LAL)

Supongamos $\overline{B'C'} \neq \overline{BC}$

Que sean distintos tiene 2 opciones (por postulados)

1. $\overline{B'C'} > \overline{BC} \Rightarrow \measuredangle B'A'C' > \measuredangle BAC$
   pues la "inclinación" sería mayor



$\nrightarrow$ por hipótesis el $\measuredangle$ es el mismo

2. $\overline{B'C'} < \overline{BC} \Rightarrow \measuredangle B'C'C' < \measuredangle BAC$

$\nrightarrow$ por hipótesis el $\measuredangle$ es el mismo

$\therefore \overline{B'C'} = \overline{BC}$

$\square$