



Física de Plasmas

breve introducción.
2da parte.

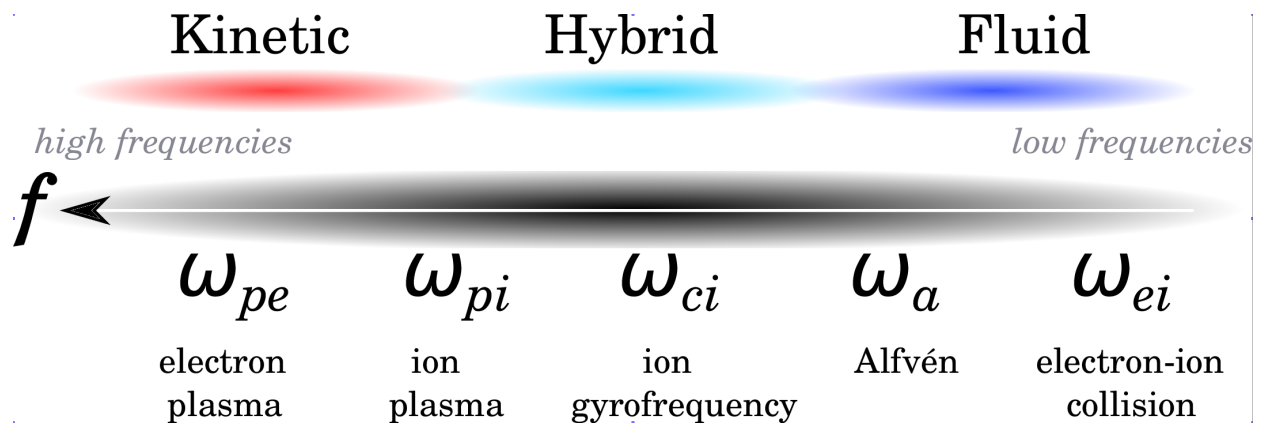
Pablo Moya

20 de mayo de 2021

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.
Grupo PLANETS, Plasmas, Complex Networks & Seismology.



Modelos de plasmas



Fuente: <https://space.aalto.fi/>

Independiente de las escalas: Ecuaciones de Maxwell

Fluidos: escalas grandes



Fuente: Pinterest

¿Cuántas plantas de pasto se ven? ¿Cuál es el largo del césped?

Modelos estadísticos: meso escalas



© Can Stock Photo - csp29402370

Fuente: Google Images

¿Cuál es el tamaño total del prado? ¿Cuál es el largo del césped?

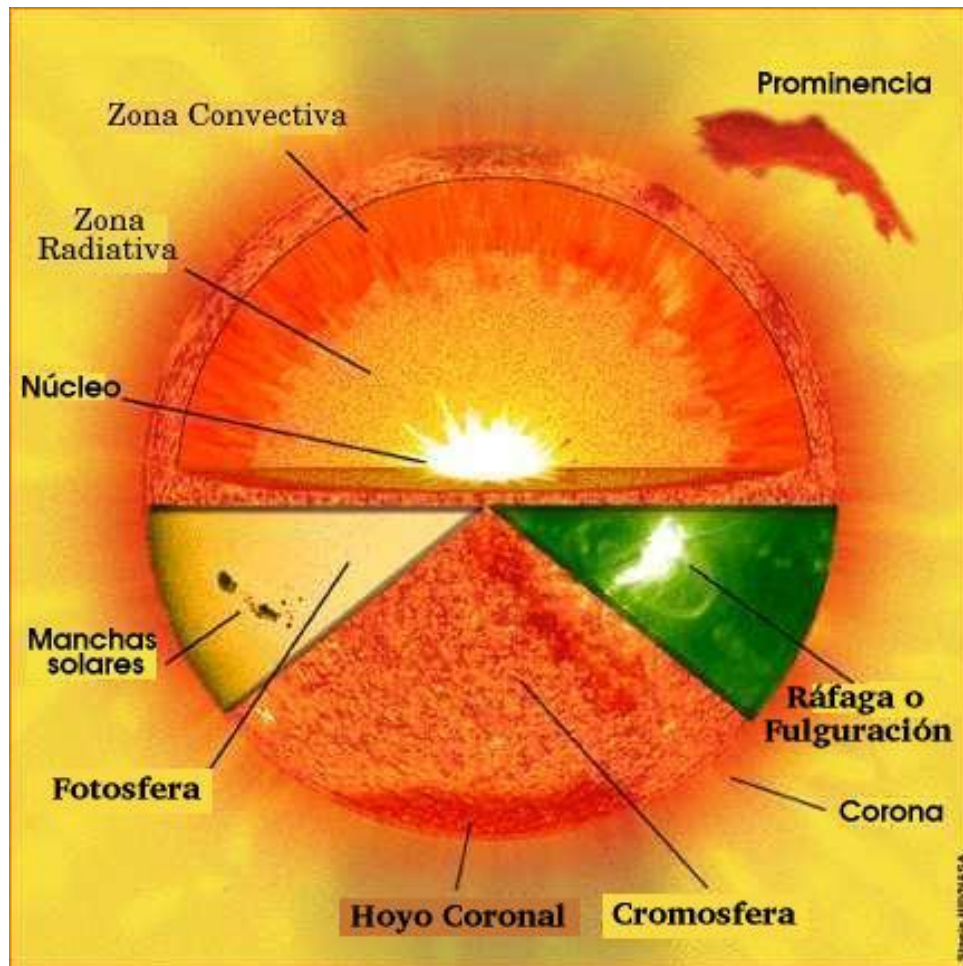
Modelos cinéticos: escalas pequeñas



Fuente: Google Images

¿Cuál es el tamaño total del prado? ¿Cuál es el largo promedio del césped?

¿Qué modelo usar?



Modelo de dos fluidos (i =iones, e = electrones)

Ecuación de continuidad (conservación de carga y masa)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{U}_e) = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{U}_i) = 0.$$

Ecuación de fuerza (momentum)

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial t} + (\mathbf{U}_e \cdot \nabla) \mathbf{U}_e \right) = -en_e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_e - m_e n_e (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i) \nu_{ei}.$$

$$M_i n_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + (\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_i \right) = Z_i e n_i \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_i - M_e n_i (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) \nu_{ei}.$$

Ecuación de estado

$$p_i = n_i k_B T_i, \quad p_e = n_e k_B T_e$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \mathbf{J} &= Z_i e n_i \mathbf{U}_i - e n_e \mathbf{U}_e \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \rho &= Z_i e n_i - e n_e. \end{aligned}$$

Modelo de dos fluidos (i =iones, e = electrones)

Ecuación de continuidad (conservación de carga y masa)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{U}_e) = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{U}_i) = 0.$$

Ecuación de fuerza (momentum)

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial t} + (\mathbf{U}_e \cdot \nabla) \mathbf{U}_e \right) = -en_e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_e - m_e n_e (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i) \nu_{ei}.$$

$$M_i n_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + (\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_i \right) = Z_i e n_i \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_i - M_e n_i (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) \nu_{ei}.$$

Ecuación de estado

$$p_i = n_i k_B T_i, \quad p_e = n_e k_B T_e$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathbf{J} = Z_i e n_i \mathbf{U}_i - e n_e \mathbf{U}_e$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \rho = Z_i e n_i - e n_e.$$

16 incógnitas!!

Soluciones lineales (ondas)

Ondas electrostáticas de electrones (alta frecuencia):

protones inmóviles: $n_i = n_0$, $U_i = 0$

electrones con temperatura T_e constante y móviles: $n_e = n_0 + n_1$, $U_e = U_1$.

Onda electrostática

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{U}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad n_1 = \tilde{n}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Ecuación de continuidad

$$\omega \tilde{n}_1 = n_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_1.$$

Ecuación de fuerza (momentum)

$$i\omega m_e n_0 \tilde{\mathbf{U}}_1 = en_0 \tilde{\mathbf{E}}_1 + ik_B T_e \tilde{n}_1 \mathbf{k}.$$

Ecuaciones de Poisson

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = -4\pi e \tilde{n}_1.$$

Luego, con $k = |\mathbf{k}|$, se obtiene

$$\left(\omega^2 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} - k^2 \frac{k_B T_e}{m_e} \right) \tilde{n}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} + k^2 \frac{k_B T_e}{m_e}$$

Ondas de Langmuir (1929)

Relación de dispersión

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{1}{2}k^2 v_{th}^2 \quad \Rightarrow \quad |\omega| \geq \omega_{pe}$$

Frecuencia de plasma

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \quad (\text{oscilaciones de plasma}).$$

Velocidad térmica

$$v_{th}^2 = \frac{2k_B T_e}{m_e} \quad (\text{rapidez más probable}).$$

Sólo se propagan en un plasma con temperatura.

$$T_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0$$

Ondas longitudinales

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0.$$

Ondas de Langmuir (1929)

Relación de dispersión

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{1}{2}k^2 v_{th}^2 \quad \Rightarrow \quad |\omega| \geq \omega_{pe}$$

Frecuencia de plasma

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \quad (\text{oscilaciones de plasma}).$$

Velocidad térmica

$$v_{th}^2 = \frac{2k_B T_e}{m_e} \quad (\text{rapidez más probable}).$$

Sólo se propagan en un plasma con temperatura.

$$T_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0$$

Ondas longitudinales

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0.$$

Tarea: Obtenga rel. de dispersión para ondas electromagnéticas ($\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2$).

Ondas de Alfvén (1942)

Plasma magnetizado $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$. Para perturbaciones de escala grande (o muy lentas) comparadas con las escalas de los electrones, tanto la inercia de los electrones, como la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell puede despreciarse.

Sea $\mathbf{U}$ es la velocidad del centro de masas del fluido y $p = nk_B T$ la presión.
Magnetohidrodinámica (MHD)

Ec. de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n \mathbf{U}).$$

Ec. de momentum

$$M_p n \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -M_p n (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p.$$

Ley de Faraday

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}).$$

Ondas de Alfvén (1942)

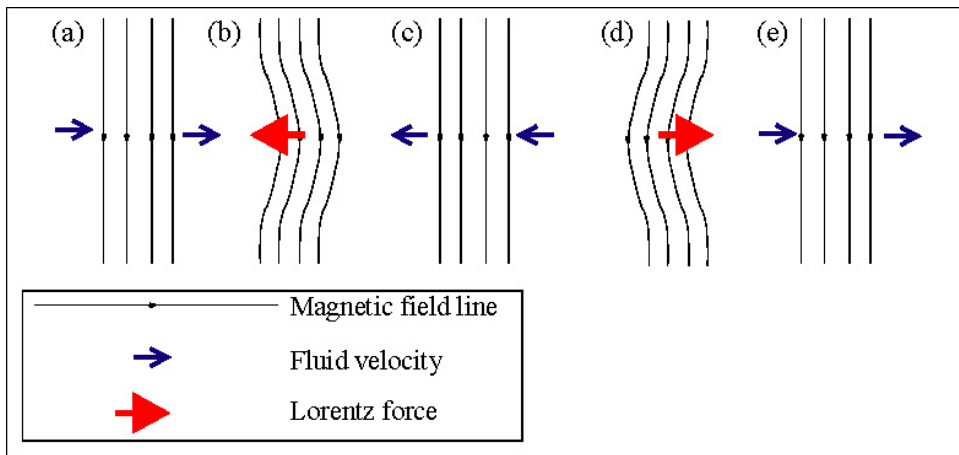
Alfvén demostró que MHD permite tres soluciones.

Ondas de sonido (magnetosónicas lenta y rápida)

Ondas de Alfvén (transversales con $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = 0$).

$$\omega^2 = k^2 V_A^2, \quad V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_0 M_p}} \quad (\text{velocidad de Alfvén}).$$

se propagan con velocidad V_A y no existen en un plasma no magnetizado.



Fuente: "Alfvén waves", C. Finlay.



Fuente: Google Images.

Ondas de Alfvén (1942)

Alfvén demostró que MHD permite tres soluciones.

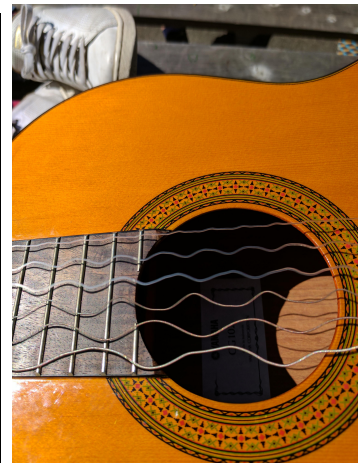
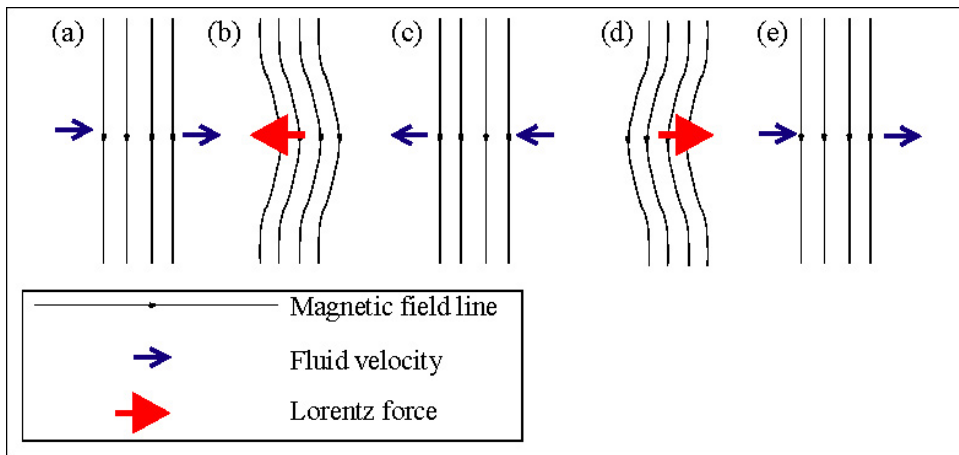
Ondas de sonido (magnetosónicas lenta y rápida)

Ondas de Alfvén (transversales con $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = 0$).

$$\omega^2 = k^2 V_A^2, \quad V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_0 M_p}} \quad (\text{velocidad de Alfvén}).$$

se propagan con velocidad V_A y no existen en un plasma no magnetizado.

Tarea: Deduzca las ecuaciones MHD y la relación de dispersión de Alfvén.



Fuente: "Alfvén waves", C. Finlay.

Fuente: Google Images.

**TO BE
CONCLUDED...→**

Modelos cinéticos.
Justificación de las ecuaciones de fluido.
Amortiguamiento de Landau.
Aplicaciones...