Departamento de Física—Facultad de Ciencias—U. de Chile
Primer Semestre 2022

Profesor: M. I. Molina **Ayudante**: M. Castro

Optica no lineal

1. Sea el indice de refraccion de un cierto medio nolineal una funcion de la longitud de onda: $n(\lambda) \approx n_0 - \xi\lambda_0$, donde λ_0 es la longuitud de onda en el espacio vacio y n_0 y ξ son constantes. Muestre que tres ondas de longuitudes de onda $\lambda_{01}, \lambda_{02}$ y λ_{03} viajando en la misma direccion no pueden ser acopladas eficientemente por el efecto nolineal de segundo orden. Seria posible el acoplamiento eficiente si una de las ondas viajara en la direccion opuesta?

2. Considere un modelo primitivo de átomo (neutro) consistente en una carga q rodeada de una distribución continua de carga negativa $\rho(r) = A\ r\ \exp(-r/r_0)$, donde A y r_0 son constantes (Figura 1). Calcule las susceptibilidades atómicas de primer, segundo y tercer orden $\chi^{(j)}$, definidas por

$$p(E) \approx \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3$$

donde $p(E)$ es el momento dipolar inducido por la presencia de un débil campo externo aplicado E. Exprese las susceptibilidades en términos de q y r_0. Existe un campo externo crítico, mas allá del cual no es posible establecer una situación de equilibrio?

3. Considere el siguiente índice de refracción obtenido de un modelo de Lorentz, para un sistema con muchas frecuencias de resonancia:

$$n^2 \approx 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

(donde se ha tomado $\gamma_j \sim 0$). Usando $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$, exprese $\epsilon - \epsilon_0$ (que es real) como una integral sobre frecuencias. A partir de este resultado y usando las relaciones de Kramers-Kronig, obtenga una expresión para la parte imaginaria de ϵ, como función de ω. Luego, utilizando $\sum_j f_j = 1$, encuentre el valor de $\int_0^\infty \omega \mathrm{Im}[\epsilon(\omega)]d\omega$ en forma cerrada.

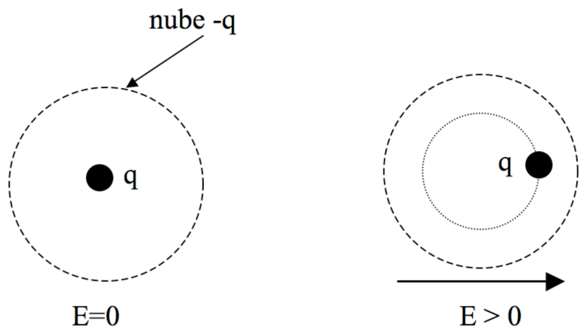

Figure 1:

4. Un haz optico viajando en la direccion z es transmitido a traves de una delgada placa de material optico nolineal que exhibe el efecto Kerr $n(I) = n + n_2 I$. La placa yace sobre el plano $x - y$, y posse un grosor d de modo que la amplitud compleja transmitida es $\exp(-ink_0 d)$. El haz es aproximadamente plano con una distribucion de intensidad $I \approx I_0[1 - ((x^2 + y^2)/W^2)]$ cerca del eje del haz (o seam $x, y \ll W$), donde I_0 es la intensidad maxima y W es el ancho del haz. Muestre que el medio actua como una lente delgada con una distancia focal inversamente proporcional a I_0.

5. Muestre que 2 ondas con frecuencias arbitrarias ω_1 y ω_2 no pueden ser acopladas dentro de un medio nolineal cuadratico.

6. Examine la respuesta de in medio nolineal de tercer orden a un campo optico conformado por dos ondas monocromaticas de frecuencias ω_1 y ω_2. Determine las componentes $P_{NL}(\omega_1)$ y $P_{NL}(\omega_2)$ de la polarizacion y muestre que las dos ondas pueden acoplarse mutuamente en un proceso de mezcla de 2 ondas sin la ayuda de otras ondas auxiliares.

7. Considere la ecuacion nolineal de Schrodinger

$$i\frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{1}{2}k_2\frac{\partial^2 A_s}{\partial \tau^2} + \gamma|A_s|^2 A_s = 0 \tag{1}$$

(a) Demuestre que $A_s(z, \tau) = A_s^0 \ \mathrm{sech}(\tau/\tau_0)e^{i\kappa z}$ es solucion. Encuentre τ_0 y κ como funcion de A_s^0.

(b) Demuestre que

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |A_s(z,\tau)|^2 \tag{2}$$

y

$$H = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ k_2 \left| \frac{\partial A_s(z,\tau)}{\partial \tau} \right|^2 + \gamma |A_s(z,\tau)|^4 \right\} \tag{3}$$

son constantes de movimiento.

8. Considere 2 guía ópticas nolineales acopladas. La evolución de las amplitudes de los campos en cada guía está dada por

$$\begin{aligned} i\,\frac{dC_1}{dz} + C_2 + \gamma|C_1|^2 C_1 = 0 \\ i\,\frac{dC_2}{dz} + C_1 + \gamma|C_2|^2 C_2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Demuestre analiticamente que $N \equiv |C_1(z)|^2 + |C_2(z)|^2$ y $H \equiv C_1(z)^* C_2(z) + C_1(z)C_2(z)^* + (\gamma/2)(|C_1(z)|^4 + |C_2(z)|^4)$ son constantes de movimiento (o sea, $dN/dz = 0, dH/dz) = 0$).

(b) Tome $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$ e integre numéricamente (4). Grafique las potencias ópticas $|C_1(z)|^2$ y $|C_2(z)|^2$ contenidas en las guías 1 y 2, como función de z para $\gamma = 0, 2, 4, 6$. Comente.

(c) El promedio temporal de las potencias ópticas contenidas en las guías 1 y 2, está definido como

$$\langle P_{1,2} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |C_{1,2}(z)|^2 dz. \tag{5}$$

donde T debe ser grande comparado con el período de los campos. Tome $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$. Nos interesa el comportamiento de $\langle P_{1,2} \rangle$ como función del parámetro nolineal γ. Grafique $\Delta \equiv \langle P_1 \rangle - \langle P_2 \rangle$ como función de γ.