

Requerimiento de phase-matching

$$\Delta K = K_1 + K_2 - K_3$$

Cuando $\Delta K \neq 0$, la eficiencia para producir I_3 se reduce drásticamente

1º: $\Delta K = 0 \Rightarrow K_1 + K_2 = K_3$

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = n_3 \omega_3 \quad (1)$$

Junto con $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (2)$

En régimen de "dispersión normal", $n(\omega)$ es monótono creciente con ω . Entonces, y sin pérdida de generalidad, si suponemos $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, re-escribimos (1) como:

$$n_3 = \frac{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}{\omega_3} \Rightarrow n_3 - n_2 = \frac{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 - n_2 \omega_3}{\omega_3}$$

$$= \frac{n_1 \omega_1 - n_2 (\omega_3 - \omega_2)}{\omega_3} = \frac{n_1 \omega_1 - n_2 \omega_1}{\omega_3}$$

∴ 0 sea $\boxed{n_3 - n_2 = (n_1 - n_2) \frac{\omega_1}{\omega_3}} \quad (3)$

$\downarrow \quad \quad \quad \uparrow$

$0 \quad \quad \quad 0$

$\rightarrow \leftarrow$

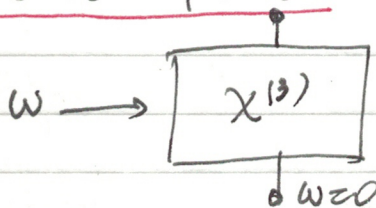
Debido a la dispersión normal
Se puede, en principio, tener dispersión anómala, pero
surgen otros problemas (absorción)

Optica no-lineal de 3^{er} orden

$$P_{NL}^{(3)} = \chi^{(3)} E^3, \text{ o un casca'}$$

$$P_{NL,i}^{(3)} = \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l$$

Esto también genera de por si, un efecto "Electro-óptico":



$$P_{NL}^{(3)} = \chi^{(3)} (E_0 + E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.)^3 = \chi^{(3)} (E_0 + E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.)^2 (E_0 + E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.)$$

$$\begin{aligned} \text{La contribución } P_{NL}^{(3)}(\omega) &= \chi^{(3)} (E_0^2 E(\omega)e^{i\omega t} + 2E_0 E(\omega)^2 e^{i\omega t} + 2|E(\omega)|^2 E(\omega)e^{i\omega t} + c.c.) \\ &= (3E_0^2 E(\omega) + 2|E(\omega)|^2 E(\omega))e^{i\omega t} + c.c. \end{aligned}$$

$$\therefore P_{NL}^{(3)}(\omega) = \chi^{(3)} (3E_0^2 + 2|E(\omega)|^2) E(\omega) \approx 3E_0^2 E(\omega) \chi^{(3)}$$

$$P_{NL}(\omega) = \underbrace{(\chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} E_0^2)}_{\chi(\omega)} E(\omega)$$

$$n^2 = 1 + 4\pi \chi(\omega)$$

$$2n \Delta n = 4\pi \Delta \chi \Rightarrow \Delta n = \frac{2\pi}{n} (3\chi^{(3)} E_0^2) = \boxed{\left(\frac{6\pi}{n} \chi^{(3)}\right) E_0^2}$$

Generación de tercer armónico

$$\omega \rightarrow \boxed{\chi^{(3)}}$$

$$P_{NL} = \chi^{(3)} (E(\omega) e^{i\omega t} + c.c.)^3$$

$$= \chi^{(3)} [E^3(\omega) e^{3i\omega t} + 3|E|^2 E e^{i\omega t} + c.c.]$$

$$\Rightarrow P_{NL}(\omega) = 3\chi^{(3)} |E|^2 E(\omega) \rightarrow \text{contribuye a } \chi^{(1)}$$

$$y \quad P_{NL}(3\omega) = \chi^{(3)} E^3(\omega) \rightarrow \text{generación de 3er armónico}$$

Efecto Kerr óptico : $n^2 = 1 + 4\pi \chi(\omega)$

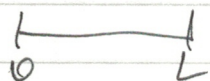
$$2n \Delta n = 4\pi \Delta \chi(\omega)$$

$$\Delta n = \frac{2\pi}{n} (3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2) \equiv n_2 I$$

de modo que $\boxed{n(I) = n + n_2 I}$

efecto Kerr
óptico

Auto-modulación de fase : debido a $n = n(I)$ la fase de un haz óptico, al atravesar un medio cúbico experimenta un cambio, que depende de I . de la propia onda.



$$\phi(L) = \frac{2\pi n(I)}{\lambda_0} L = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n + n_2(I)) L$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \phi = \frac{2\pi n_2 L}{\lambda_0} I}$$

Por ej., si queremos que $\Delta\phi(L) = \pi$

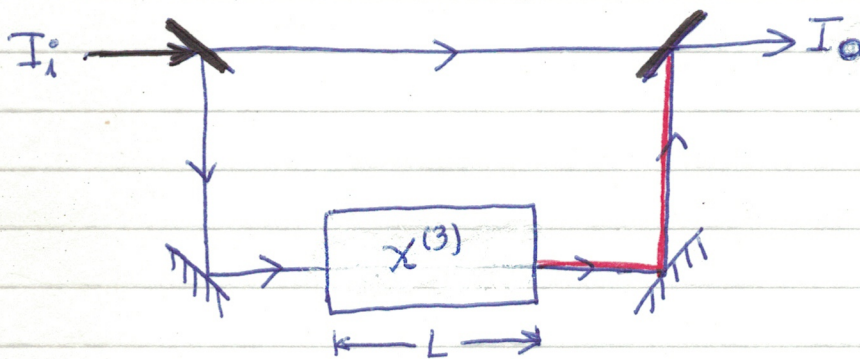
$$\Rightarrow \pi = 2\pi n_2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right) I \Rightarrow I = \frac{1}{2n_2(L/\lambda_0)} \Rightarrow \boxed{P = \frac{\lambda_0 A}{2L n_2}}$$

Fibra optica, $L = 1\text{m}$, $A = 10^{-2}\text{mm}^2$; $n_2 = 10^{-10} \frac{\text{cm}^2}{\text{W}}$,
 $\lambda_0 = 1\mu\text{m}$ (ir) $\Rightarrow \boxed{P_\pi = 0.5\text{[W]}}$

Si n_2 es mayor, es posible lograr $\Delta\phi = \pi$ en distancias de 1cm , con $P = 0\text{ (mW)}$.

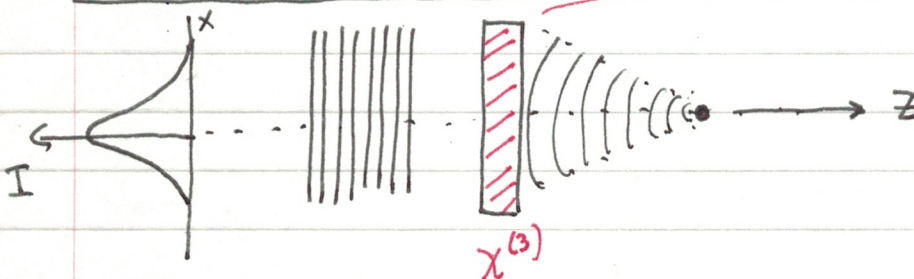
El efecto de modulación de fase puede emplearse para modular intensidad.

"controlando luz con luz"



Interferómetro
Mach-Zehnder

Auto-enfocamiento:



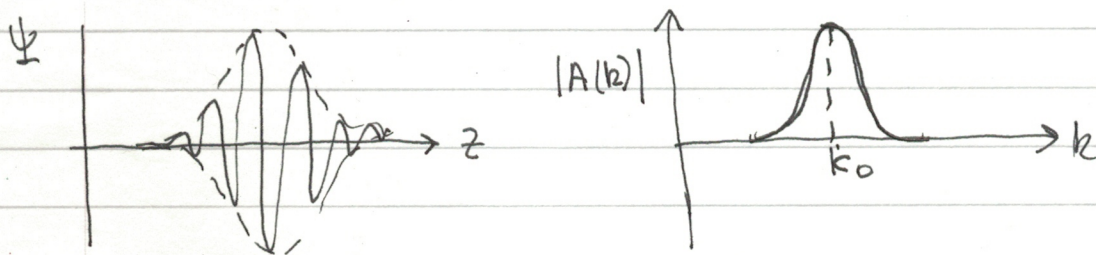
Optical Pulse & group velocity

1D onda scalar $\Psi(z,t)$ (soluc. a l'eqn. de Maxwell)

$$\Psi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega t - kz)} dk \quad (1)$$

$$\Psi(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-ikz} dk \quad (2) \quad |A(k)|^2 \text{ Spectre de Fourier de } \Psi(z,t)$$

o dens $\omega = \omega(k)$ "relac. de dispersi6"
mediu isotropicu. $\omega(-k) = \omega(k)$



$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} (k - k_0) + \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega_0 t + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (k - k_0)t - kz)} dk \\ &\approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t - z\right](k - k_0)} dk}_{E[z - (d\omega/dk)_0 t]} \end{aligned}$$

"envelope"

$$\Psi(z,t) \approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} E[z - (d\omega/dk)_0 t]$$

→ el pulso viaja sin distorsión, con velocidad

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0$$

como la densidad de energía $\propto |\Psi(z,t)|^2$

→ veloc. de grupo $\leftrightarrow$ transporte de energía

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 \neq \frac{\omega_0}{k_0} = v_{ph}$$

óptico: $k = n(\omega) \frac{\omega}{c} \Rightarrow \boxed{v_{ph} = \frac{c}{n(\omega)}}$

$$y \quad v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0^{-1} = \left[\frac{dn(\omega)}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} \right) + \frac{1}{c} n(\omega) \right]^{-1} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{dn}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)}$$

$$\therefore \boxed{v_g = \frac{c}{n + \omega (dn/d\omega)}}$$

$v_g < v_{ph}$ si $dn/d\omega > 0$ (dispersión normal)

si $dn/d\omega < 0$ y grande, v_g puede ser mayor que c .

↓
cuando ocurre esto no es válida la aprox. unid.

siguiente conexión: $\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (k - k_0)^2 \rightarrow$ de origen a $v_g = v_g(\omega)$

→ ensanchamiento del pulso

Solitones ópticos

consideramos propagación de $\vec{E}(z,t) = \vec{A}(z,t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c.$ (1)

donde el medio está caracterizado por

$$n(t) = n_0 + n_2 I(t) \quad , \quad \text{con } I(t) = \frac{n_0 c}{2\pi} |\vec{A}(z,t)|^2 \quad (2)$$

la ec. de ondas, tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$$

 donde $\vec{D} = \vec{D}_L + \vec{D}_{NL}$ (3)
 $= \vec{E} + 4\pi(\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}) \equiv (1 + \chi) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$

Introducimos T. de Fourier:

$$\vec{E}(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(z,\omega) e^{-i\omega t} d\omega ; \quad \vec{D}(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(z,\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4)$$

$$\text{con } \vec{D}(z,\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(z,\omega) \quad (5)$$

$\hookrightarrow$ ϵ : dielectrico efectivo (lineal + no-lineal)

Reempl. (4) en (3), resulta

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z,\omega)}{\partial z^2} + \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(z,\omega) = 0$$

 (6)

introduce $A(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{i\omega t} dt$ (7)

and, de (1) :

$$\begin{aligned}
 E(z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t') e^{i\omega t'} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t') e^{i(k_0 z - \omega_0 t')} e^{i\omega t'} dt' + \int_{-\infty}^{\infty} A^*(z, t') e^{-i(k_0 z - \omega_0 t')} e^{i\omega t'} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t') e^{i(k_0 z + (\omega - \omega_0)t')} dt' + A^*(z, t') e^{-i(k_0 z - (\omega_0 - \omega)t')} dt' \\
 &= A(z, \omega - \omega_0) e^{i k_0 z} + A^*(z, \omega + \omega_0) e^{-i k_0 z} \\
 &\approx A(z, \omega - \omega_0) e^{i k_0 z} \quad (\text{RWA}) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Replacing into (6):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}(z, \omega) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial A}{\partial z} e^{i k_0 z} + i k_0 A e^{i k_0 z} \right\} \\
 &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) e^{i k_0 z} + 2 i k_0 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) e^{i k_0 z} - k_0^2 A e^{i k_0 z} \\
 &\approx 2 i k_0 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) e^{i k_0 z} - k_0^2 A e^{i k_0 z}
 \end{aligned}$$

(0 see $\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \ll k_0 A$)

$$(6) \text{ queda: } 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + (k^2 - k_0^2)A = 0$$

} (9)

$$\text{con } k(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right) \sqrt{\epsilon(\omega)} = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

$$k \text{ difiere poco de } k_0 \Rightarrow k^2 - k_0^2 \approx (k+k_0)(k-k_0) \approx 2k_0(k-k_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z}(z, \omega - \omega_0) + i(k - k_0)A(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (10)$$

Ahora, k depende de ω y de la intensidad I . Típicamente se aproxima estas dependencias como:

$$k = k_0 + \Delta k_{NL} + k_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k_2(\omega - \omega_0)^2 \quad (\text{Taylor}) \quad (11)$$

$$\text{donde } \Delta k_{NL} = \left(\frac{\omega_0}{c}\right) \Delta n_{NL} = n_2 I \left(\frac{\omega_0}{c}\right) \quad (12)$$

donde I está dado por (2).

Por tanto,

$$k_1 = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{c} \left[n_L(\omega) + \omega \frac{dn_L}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v_g(\omega_0)} \quad (13)$$

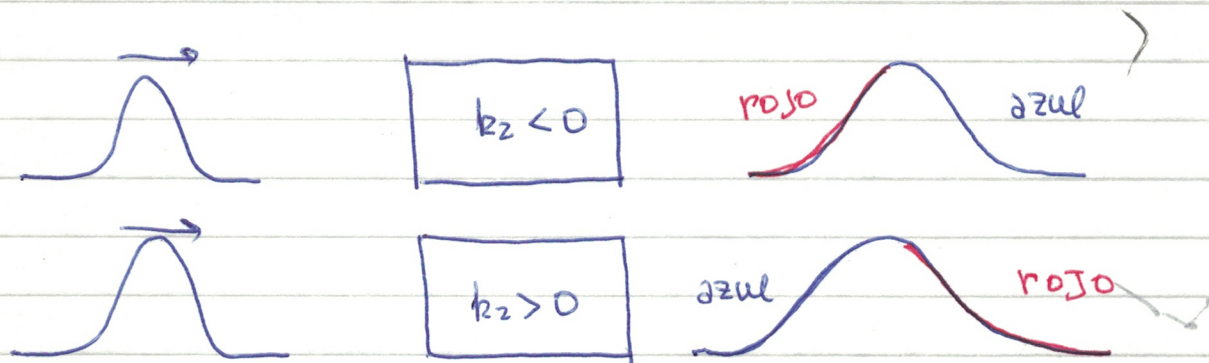
veloc. grupo

$$k_2 = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{v_g(\omega)} \right]_{\omega_0} = \left[\left(-\frac{1}{v_g^2(\omega)} \frac{dv_g}{d\omega} \right) \right]_{\omega=\omega_0} \quad (14)$$

dispersión de veloc. grupo

$k_2 > 0 \Rightarrow$ la mayor se propaga más rápido

$k_2 < 0 \Rightarrow$ la mayor se propaga más lento



Ahora se reemplaza (11) en (10)'.

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \Delta k_{NL} A - i k_1 (\omega - \omega_0) A - \frac{1}{2} i k_2 (\omega - \omega_0)^2 A = 0 \quad (15)$$

y se transforma al dominio temporal: $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(z, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \frac{d(\omega - \omega_0)}{2\pi} = A(z, t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0) A(z, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \frac{d(\omega - \omega_0)}{2\pi} = i \frac{\partial A(z, t)}{\partial t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 A(z, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \frac{d(\omega - \omega_0)}{2\pi} = - \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2}$$

y (15) se transforma en:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + k_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} i k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i \Delta K_{NL} \vec{A} = 0 \quad (16)$$

def: $z = t - \frac{z}{v_g} = t - k_1 z$ y def: $A_s(z, z) = A(z, t)$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{\partial A_s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial A_s}{\partial z} - k_1 \frac{\partial A_s}{\partial z}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial A_s}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} - i \Delta K_{NL} A_s = 0 \quad (17)$$

y sabemos: $\Delta K_{NL} = n_2 \left(\frac{\omega_0}{c} \right) I = \frac{n_0 n_2 \omega_0}{2\pi} |A_s|^2 \equiv \gamma |A_s|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} - i \gamma |A_s|^2 A_s = 0$$

$$i \frac{\partial A_s}{\partial z} = \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} - \gamma |A_s|^2 A_s$$

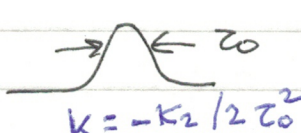
Ec. de Schrödinger no-lineal
comprobar como ejercicio

Solución fundamental: $A_s(z, z) = A_s^0 \text{sech}(z/z_0) e^{iKz}$

donde debe cumplirse: $|A_s^0|^2 = \frac{-k_2}{\gamma z_0^2} = \frac{-2\pi k_2}{n_0 n_2 \omega_0 z_0^2}$

reloc entre
 A_s^0 y z_0
↓
amplitud ancho

$\Rightarrow$ se requiere: $k_2/n_2 < 0$



$K = -k_2 / 2 z_0^2$