Mecánica II

Felipe Torres
felipetorres@uchile.cl,

Campo Central y el problema de Kepler

Segundo Semestre 2020

Campo Central

Se denomina campo central a un campo de fuerza que cumpla con la condición

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{r}}$$

r es la coordenada radial.

1) En un campo central se conserva el momentum angular

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\frac{dU}{dr}\vec{r} \times \hat{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Conservación de Momentum Angular:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$

$$\boxed{L = mr^2\dot{\theta}}$$

Campo Central

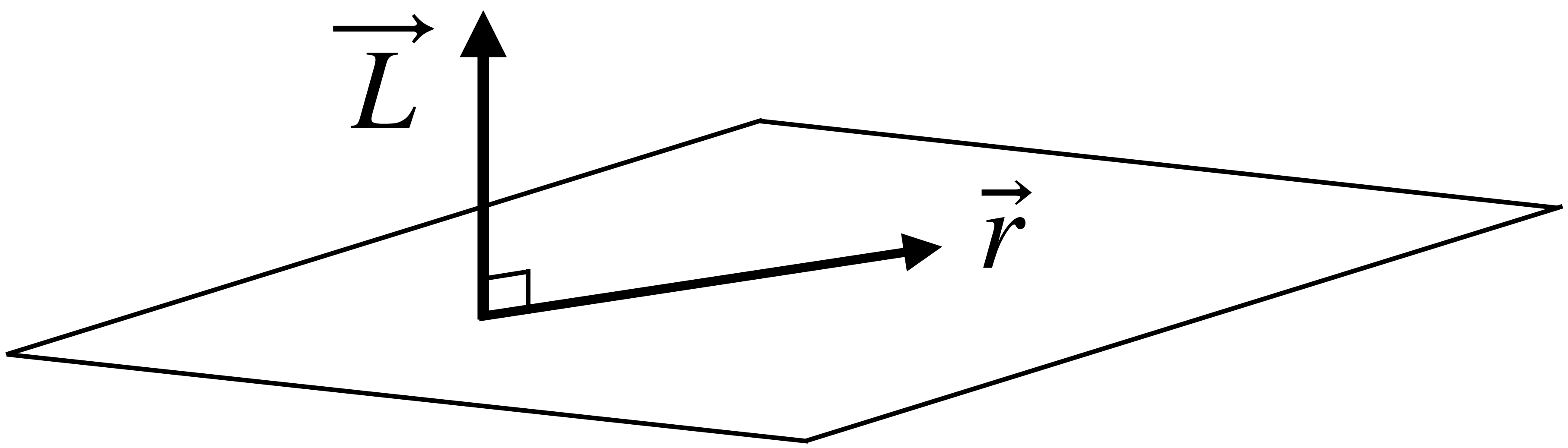
2) En un campo central el movimiento es planar

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = m\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = m\vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) = 0$$

En un campo central el vector posición siempre es perpendicular al momento angular



Campo Central

3) Ecuaciones de Newton en un campo central $\vec{F} = F(r)\hat{r}$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F(r)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Para la parte angular

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad /r$$

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = 0$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Campo Central

Para la parte radial

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F(r)$$

Sea $u = \frac{1}{r}$, entonces

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{mr^2}{L}\frac{dr}{dt} = -\frac{m}{L}\dot{r}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{m}{L}\frac{d\dot{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{m^2r^2}{L^2}\ddot{r}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L^2}{m^2}u^2u''$$

Campo Central

Obtenemos

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F(r)$$

$$m\left(-\frac{L^2}{m^2}u^2u'' - r\frac{L^2}{m^2r^4}\right) = -F(r)$$

$$-\frac{L^2}{m}(u^2u'' + u^3) = -F(1/u)$$

$$\boxed{u^2u'' + u^3 = \frac{m}{L^2}F(1/u)}$$

4) En un campo central se conserva la energía

Conservación de la Energía:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + U(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r), \qquad U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}$$

Resumen Campo Central

1) En un campo central se conserva el momentum angular

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

2) En un campo central el movimiento es planar

3) Ecuaciones de Newton en un campo central

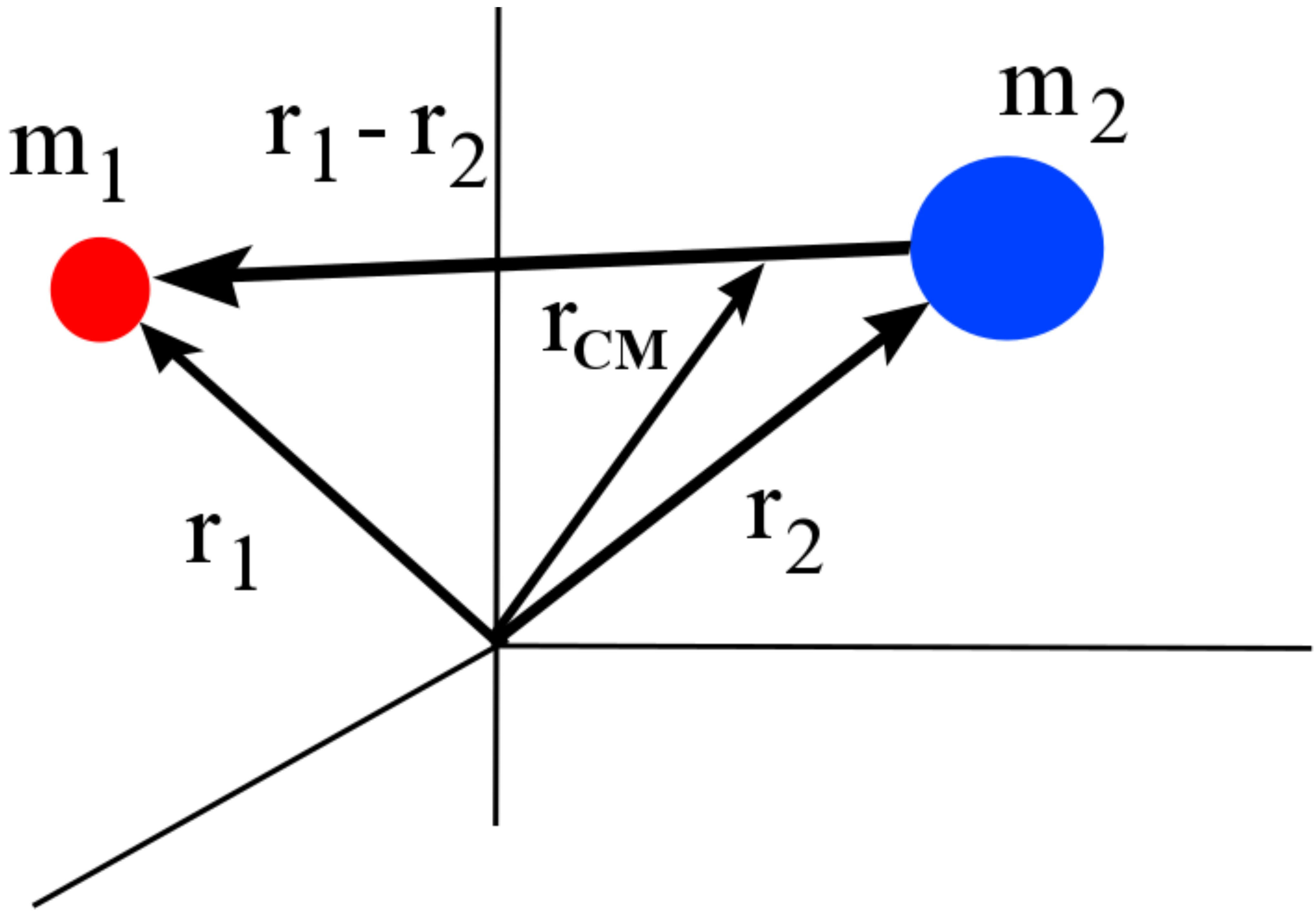
$$u^2u'' + u^3 = \frac{m}{L^2}F(1/u)$$

4) En un campo central se conserva la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

Problema de dos Kepler

Dos objetos de masa m_1 y m_2 se atraen mutuamente a través de una fuerza Gravitacional .



Problema de dos Cuerpos

Vector posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Vector centro de masa $\vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

Energía

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Consideremos un sistema de coordenadas tal que $\vec{r}_{CM} = 0$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad 0 = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

Problema de dos Cuerpos

Resolviendo las ecuaciones anteriores

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Entonces,

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{m_1 m_2^2 \dot{\vec{r}}^{\,2}}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2^2 m_1 \dot{\vec{r}}^{\,2}}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{m_1 m_2 \dot{\vec{r}}^{\,2}}{(m_1 + m_2)} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= m \dot{\vec{r}}^{\,2}$$

Problema de dos Cuerpos

Masa reducida $$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Si $m_1 >> m_2$ entonces $$m \approx \frac{m_1 m_2}{m_1} = m_2$$

Energía del problema de dos cuerpos en sistema con el centro de masa en el origen

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$$

Si la energía potencial sólo depende de la distancia relativa, el problema es isotrópico (independiente de la dirección)

$$U(\vec{r}) = U(r)$$

Problema de Kepler $\overrightarrow{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}, \qquad \alpha = Gm_1m_2$

$$\overrightarrow{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r}, \qquad U = -\frac{\alpha}{r}$$

Resolvamos la ecuación de Binet para en el problema de Kepler

$$u^2u'' + u^3 = \frac{m\alpha}{L^2}u^2 = \frac{u^2}{p}$$

$$u'' + u = \frac{1}{p}$$

Solución $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta$

Ecuación de la órbita $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$

Problema de Kepler

Ecuación de la órbita

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\Big(E - U_{eff}(r)\Big)} \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E - U_{eff}(r)\Big)}$$

Solución

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \qquad p = \frac{L^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}$$

Puntos de retorno

Escribamos la energía

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{eff}(r) \geq 0$$

Los puntos de retorno, son puntos de la órbita tales que

$$\boxed{\dot{r} = 0 \qquad E = U_{eff}(r)}$$

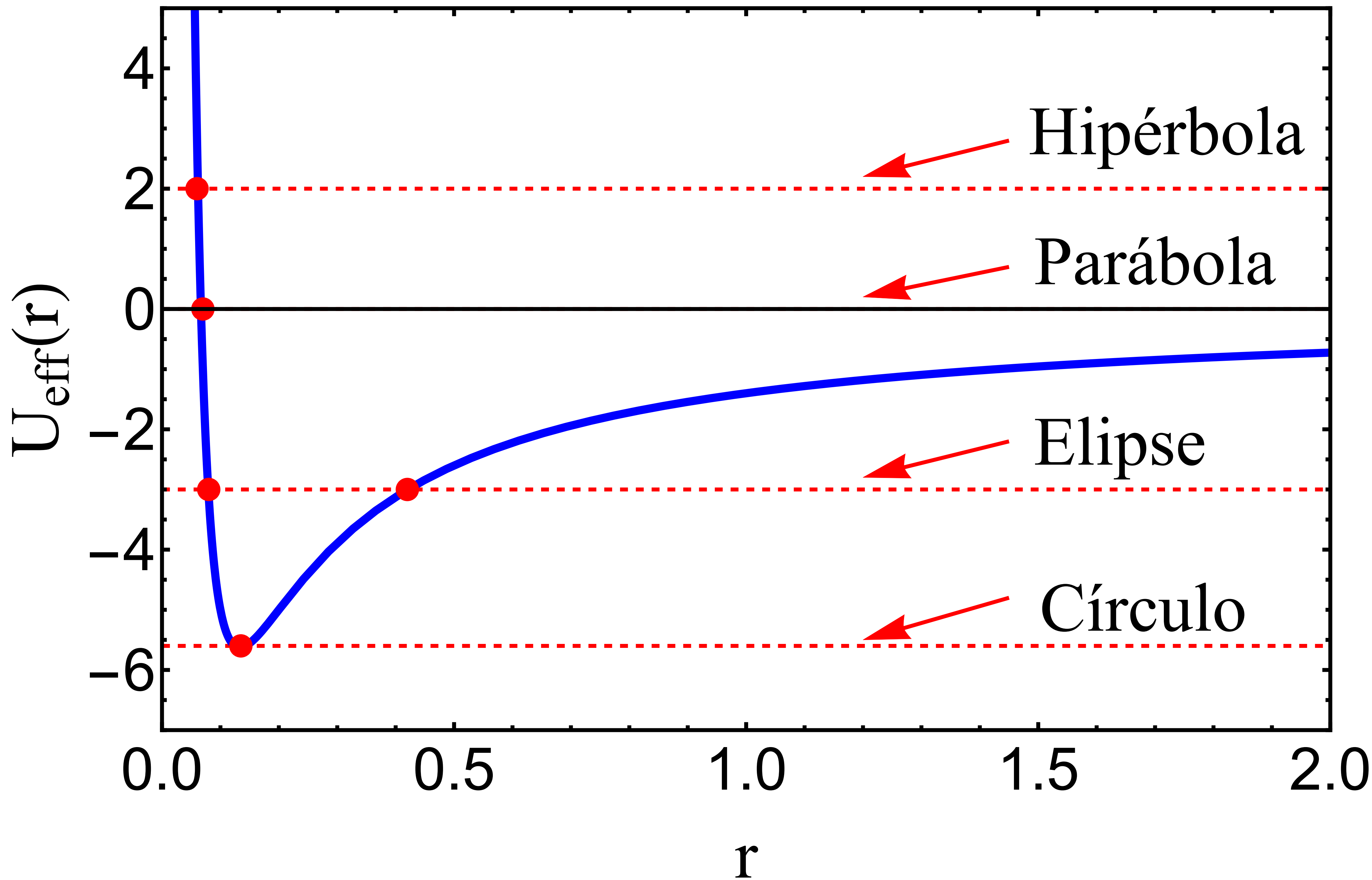
En el problema de Kepler

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

Ecuación cuadrática de segundo orden con dos soluciones

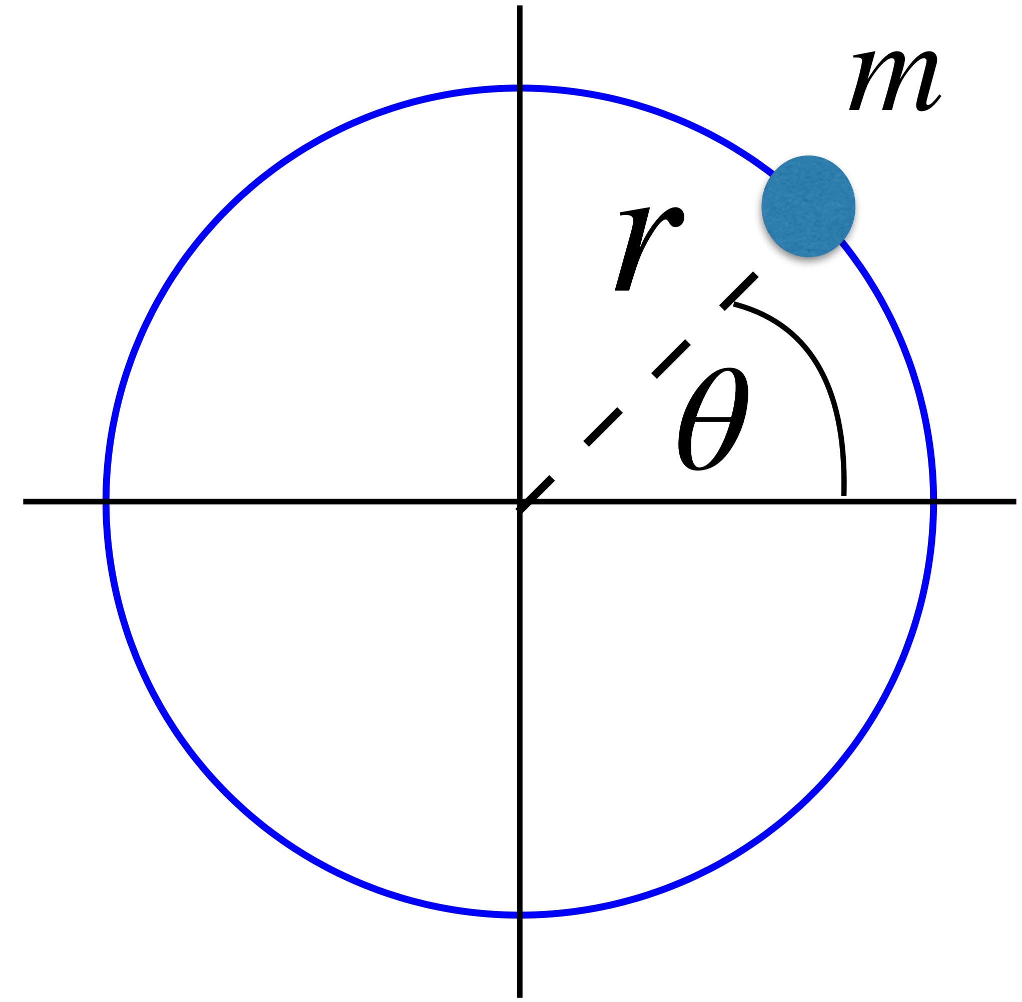
Problema de Kepler

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \alpha = G m_1 m_2$$



1) Órbita Circular

Excentricidad $\quad e = 0$



Ecuación de la órbita

$$r = p = \frac{L^2}{m\alpha}$$

Conservación de la energía $\quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r}$

Ley de Newton (radial)

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{\alpha}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad mv^2 = \frac{\alpha}{r}$$

1) Órbita Circular

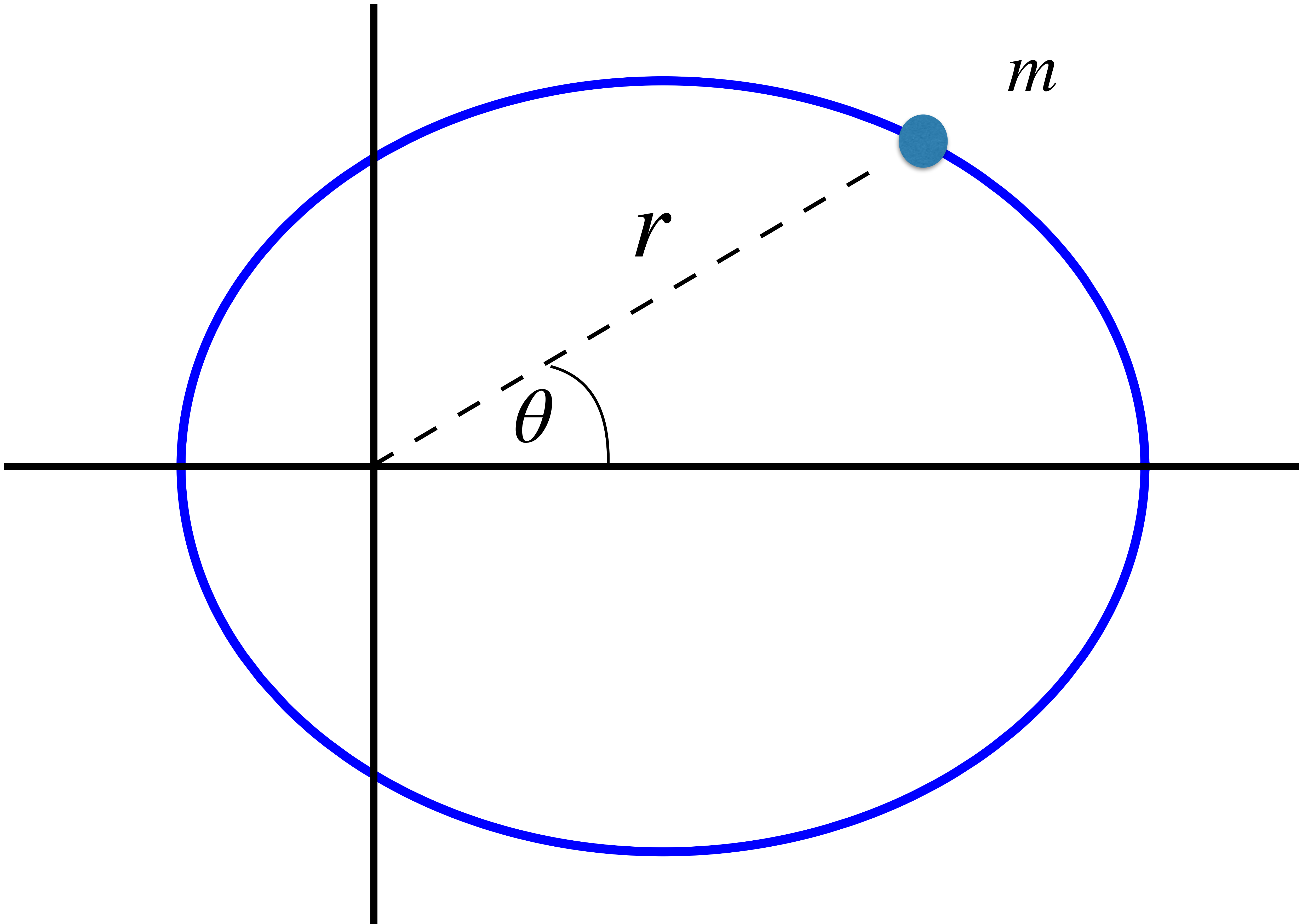
$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{2r} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{2r}$$

Radio de la órbita

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{L^2}{m\alpha}$$

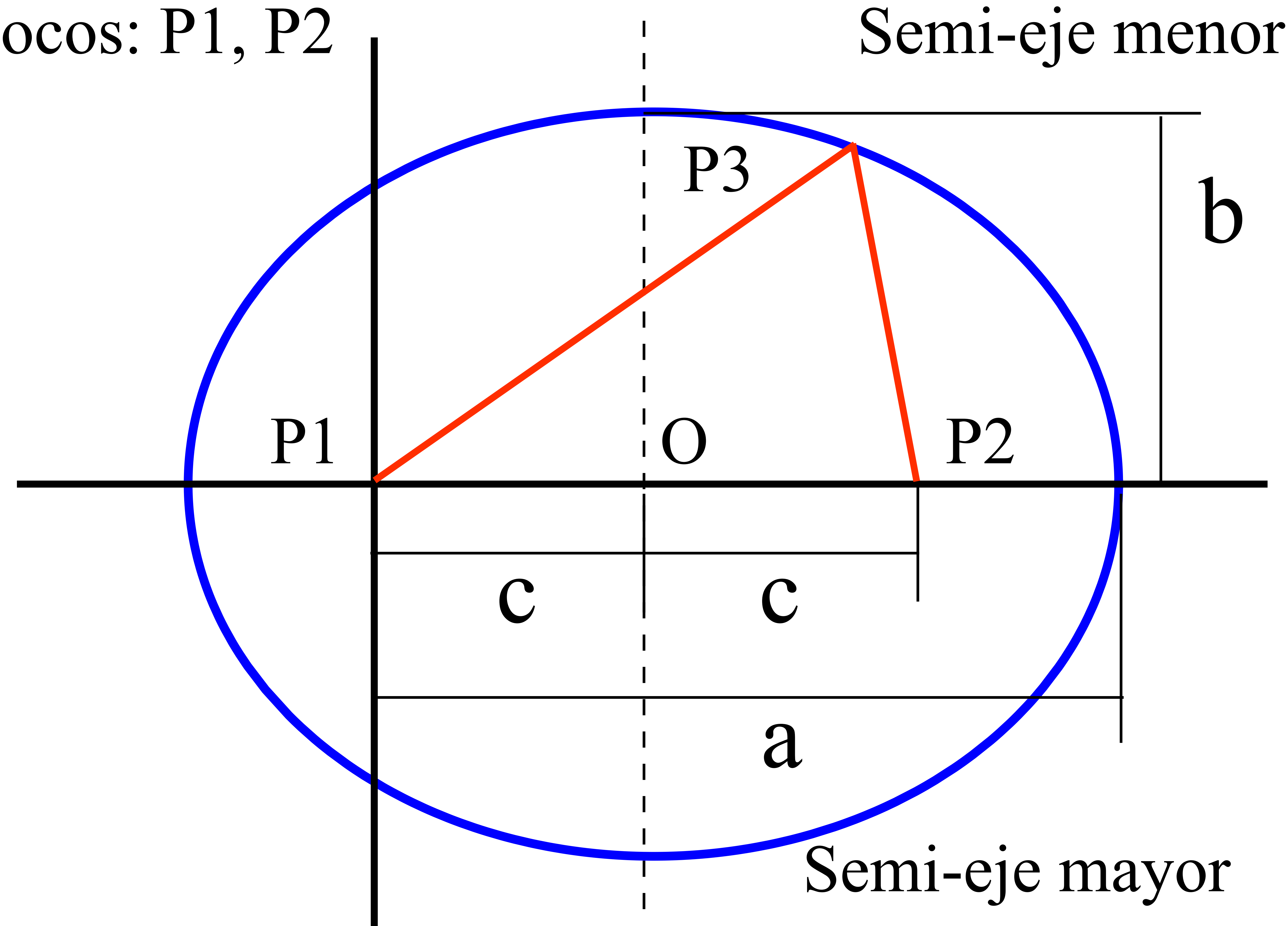
Cuando $E < 0$ el movimiento es finito, es decir, el sistema describe órbitas cerradas.

2) Órbita Elíptica



Centro de la Elipse: Punto O

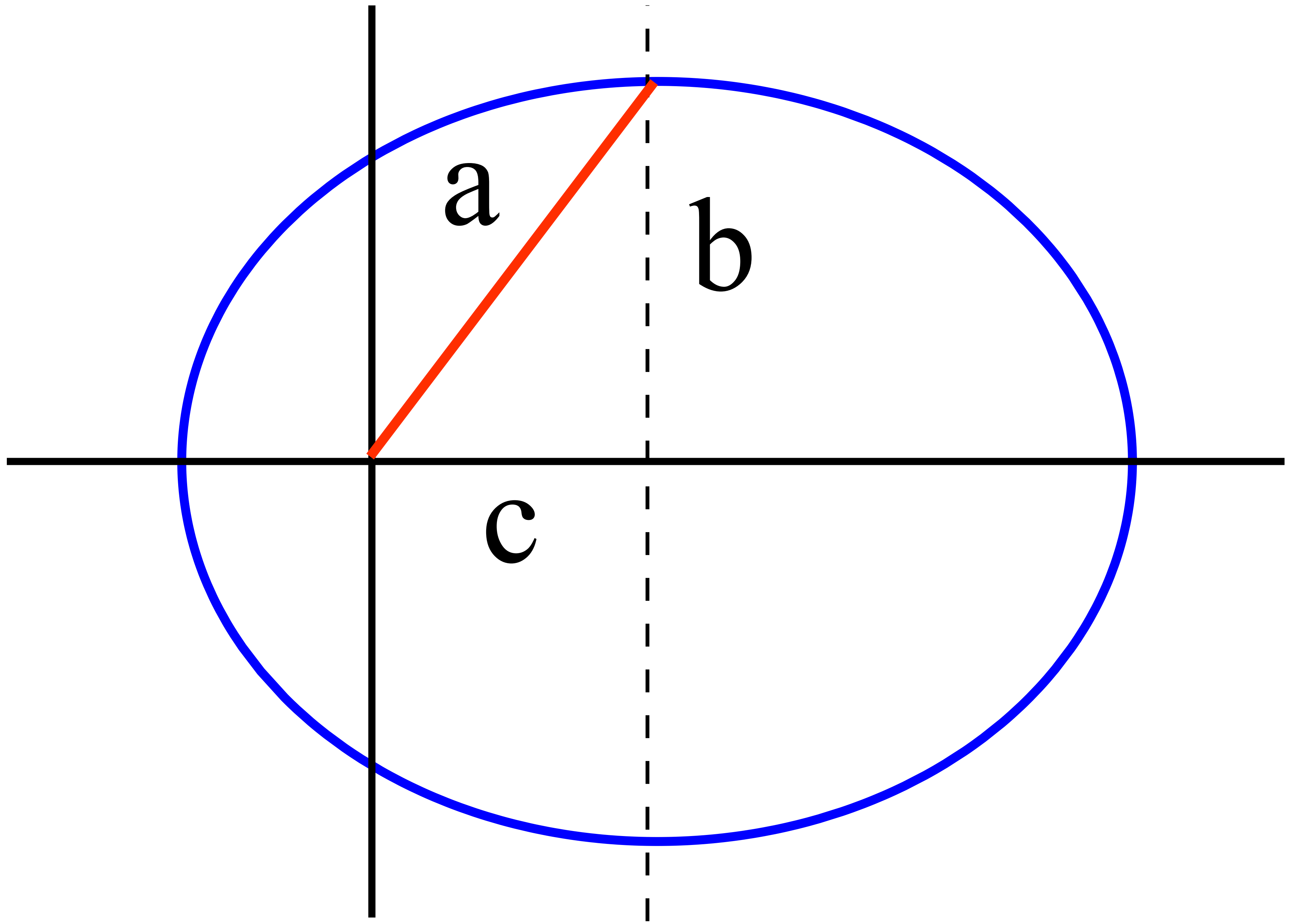
Focos: P1, P2



Propiedades de la Elipse

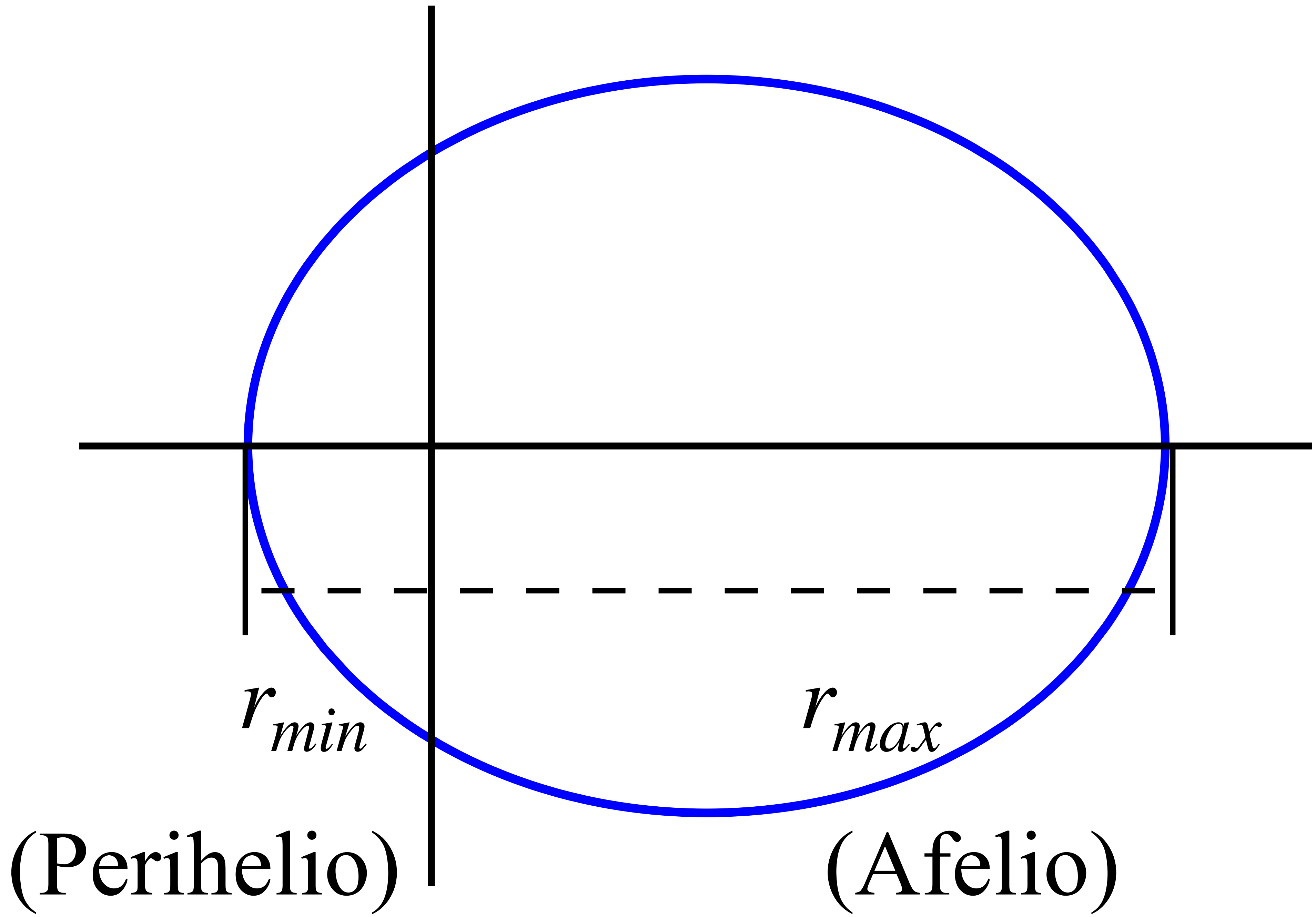
$$\overline{P1P3} + \overline{P1P2} = 2a$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$



Excentricidad de la Elipse

$$e = \frac{c}{a}$$



De la ecuación de la órbita

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

$\theta = 0$ $$r_{max} = \frac{p}{1+e}$$

$\theta = \pi$ $$r_{min} = \frac{p}{1-e}$$

$$0 < e < 1$$

Reescribamos las distancias a, b y c en función de e y p.

$$r_{max} - r_{min} = \frac{p}{1+e} - \frac{p}{1-e} = \frac{p(1-e-1-e)}{1-e^2}$$

$$r_{max} - r_{min} = \frac{2pe}{e^2-1} = 2c$$

$$c = \frac{pe}{e^2-1}$$

$$a = r_{min} + c = \frac{p}{1-e} - \frac{pe}{1-e^2} = \frac{p(1+e)-pe}{1-e^2}$$

$$a = r_{min} + c = \frac{p(1+e) - pe}{1-e^2} = \frac{p}{1-e^2}$$

Utilizando

$$c^2 + b^2 = a^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{p\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Note que

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

Esta relación será útil para demostrar las leyes de Kepler

En una órbita elíptica la energía

$$E_0 < E < 0$$

Calculemos los puntos de retorno

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{eff} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = U_{eff}$$

Utilizando $\quad E = -|E|$

$$-|E| = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$r^2 - \frac{\alpha}{|E|} r + \frac{L^2}{2m|E|} = 0$$

$$r = \frac{\alpha}{2|E|} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{L^2}{2m|E|}}$$

Existen dos soluciones reales distintas, las que corresponden a r_{min}, r_{max}

Cuando

$$\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{L^2}{2m|E|} = 0$$

Se recupera el caso del círculo.

Escribamos la solución como

$$r_{min} = r_0 - \Delta \qquad r_{max} = r_0 + \Delta$$

$$r_{min} = a - c \qquad r_{max} = a + c$$

Donde

$$r_0 = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{L^2}{2m|E|}}$$

$$a = r_0 = \frac{\alpha}{2|E|}$$

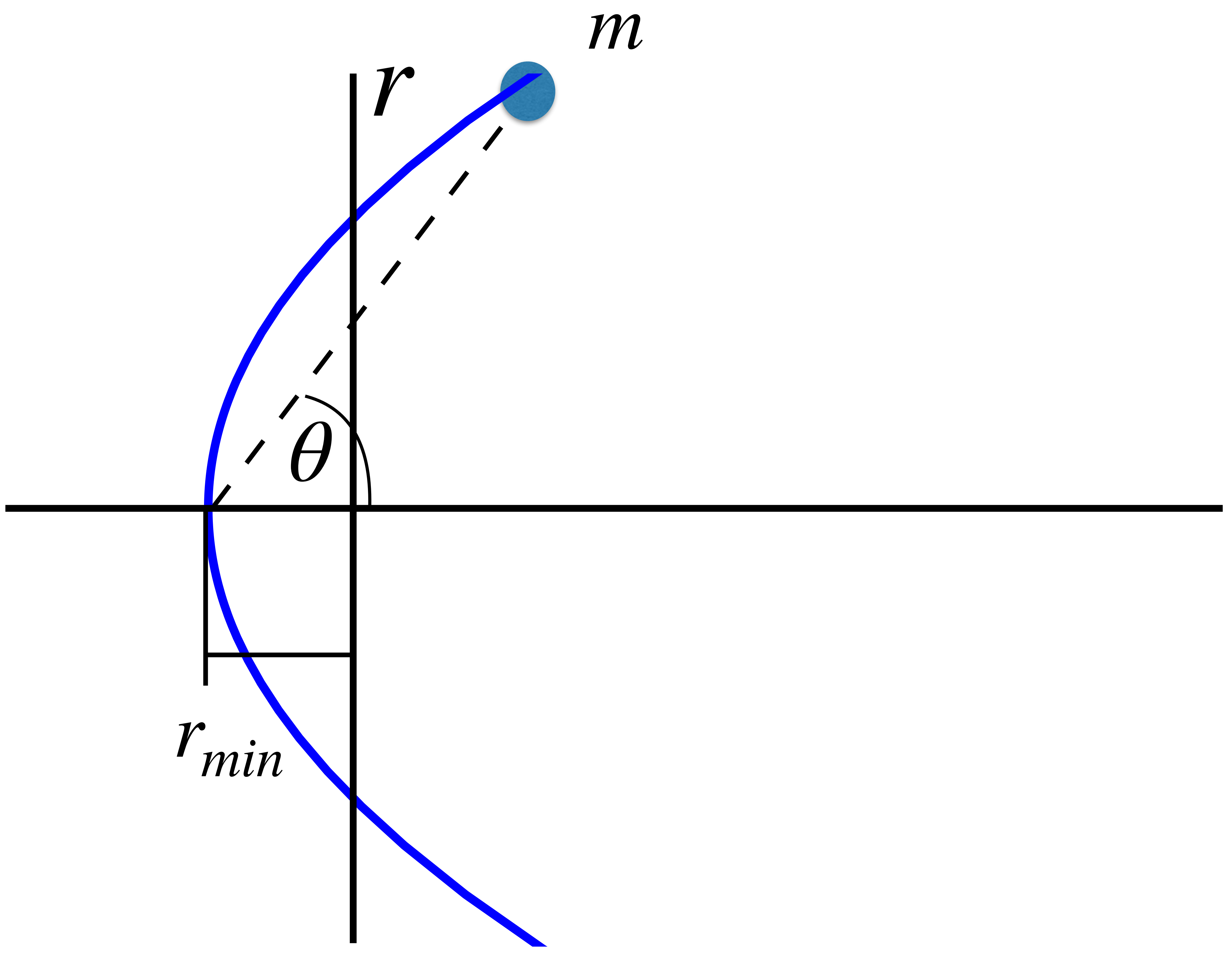
$$c = \Delta = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 - \frac{L^2}{2m|E|}}$$

Finalmente

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{m\alpha^2}}$$

$$|E| = \frac{m\alpha^2}{2L^2}(1 - e^2)$$

3) Órbita Parabólica



Cuando $E \geq 0$ el movimiento es infinito

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}}$$

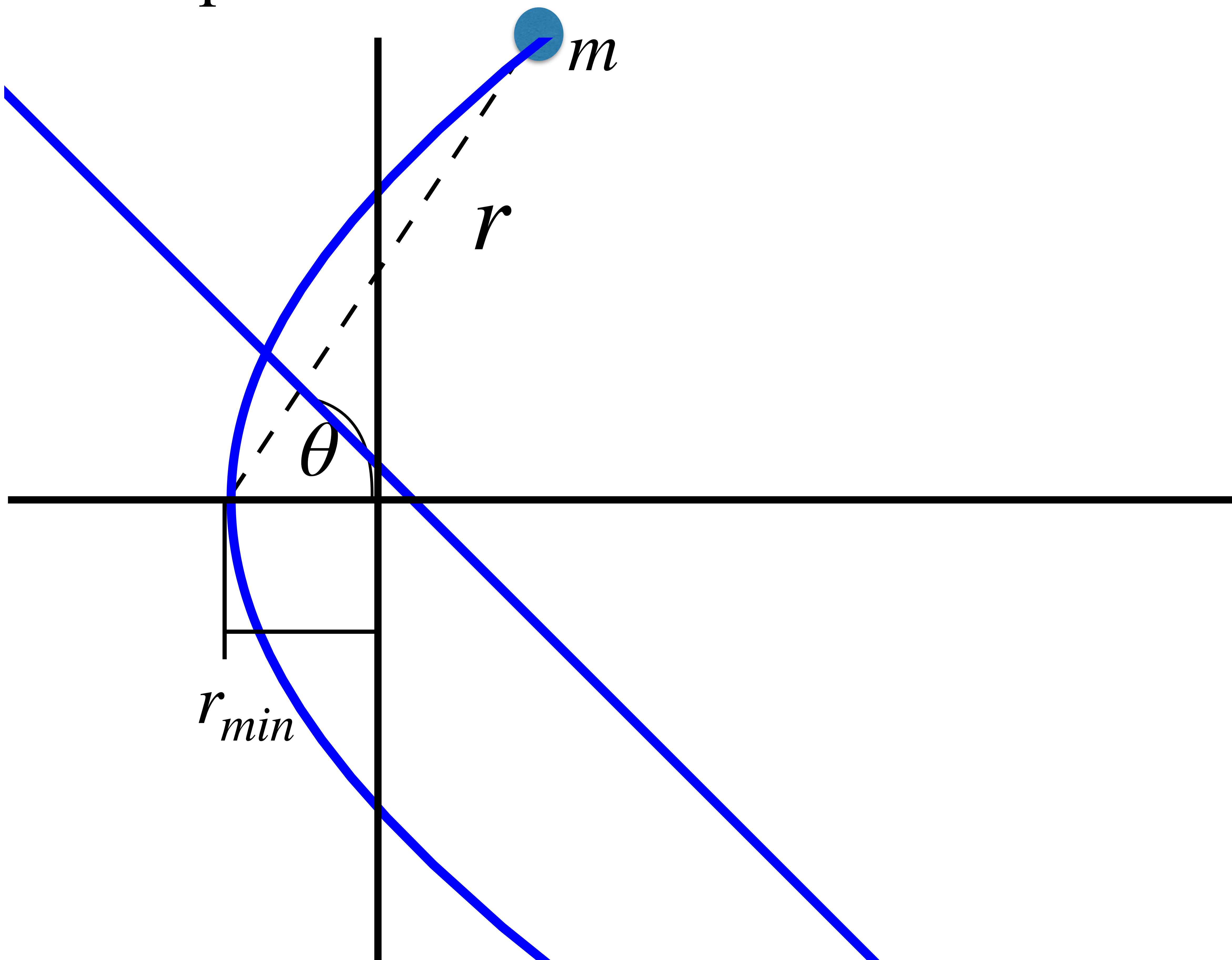
Parábola $\quad E = 0, \qquad e = 1$

Calculemos los puntos de retorno

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{eff} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = U_{eff}$$

$$0 = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r_{min} = \frac{L^2}{2m\alpha} = \frac{p}{2}$$

4) Órbita Hiperbólica



Cuando $E \geq 0$ el movimiento es infinito

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}}$$

Hipérbola $E > 0, \qquad e > 1$

Calculemos los puntos de retorno

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{eff} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = U_{eff}$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$r^2 + \frac{\alpha}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

$$r = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

Manteniendo la solución positiva

$$r_{min} = -\frac{\alpha}{2E} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

De la ecuación de la órbita

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

$$\theta = 0 \qquad r_{min} = \frac{p}{1+e} \qquad e > 1$$