Ayudantía 1

Mecánica II

Ayudantes: Valentina Acuña, Loreto Martínez

Problema 1

Una partícula describe una órbita circular en un campo central

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}\,. \tag{1}$$

Demuestre que si k disminuye a la mitad, la órbita de la partícula es parabólica

Solución:

Una partícula tiene una órbita circular si su aceleración centrípeta a_c es constante. Por tanto de la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} ma_c &= F(r)\,, \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{k}{r^2}\,, \end{aligned}$$

es decir,

$$mv^2 = \frac{k}{r}\,. \tag{2}$$

La fuerza que siente una partícula con el potencial en que se encuentra están relacionados como

$$F = -\frac{dU}{dr}\,. \tag{3}$$

Idealmente podemos integrar la ecuación (3) y reemplazar la fuerza (1) para obtener el potencial. Pero como esta fuerza tiene la misma forma que una fuerza columbiana o gravitaroria (ambos dependen de r^{-2}),

$$U = -\frac{k}{r}\,. \tag{4}$$

Utilizando (4) para calcular la energía de la partícula considerando que esta tiene tanto energía cinética como gravitacional,

$$\begin{aligned} E &= K + U\,, \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Reemplazando (2) en (5)

$$E = -\frac{k}{2r} < 0\,. \tag{6}$$

Como se vió en clases, tenemos que para una partícula en una órbita circular tiene energía negativa lo que nos señala que su movimiento está confinado. Si reducimos k a la mitad, pero mantenemos la velocidad que llevaba originalmente la partícula, se ve que en la expresión (5)

$$E = \frac{k}{2r} - \frac{k}{2r} = 0\,. \tag{7}$$

En clases se vió que esto corresponde a una órbita parabólica.

Problema 2

Determine la órbita de una partícula que se mueve bajo la acción de un campo central

$$F = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}\,, \tag{8}$$

siendo λ una constante.

Solución:

De la ley de Newton

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^2}\,.$$

Luego como $L = mr^2\dot{\theta}$, tenemos

$$-\frac{L^2}{m}(u^2u'' + u^3) = -ku^2 - \lambda u^3$$

Donde $u = 1/r$, luego agrupando términos de una manera conveniente

$$u^2u'' + u^3 = \frac{m}{L^2}(k + \lambda u)u^2\,.$$

Reconocemos que

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{L^2}(k + \lambda u)\,.$$

Luego como $u'' + u = \frac{1}{p}$, se sigue

$$u'' + u = \frac{m}{L^2}(k + \lambda u)\,,$$

$$u'' + \left(1 - \frac{m\lambda}{L^2}\right)u = \frac{mk}{L^2}\,.$$

La solución de esta ecuación esta dada por,

$$\begin{aligned} u &= \frac{mk}{L^2 - \lambda m} + A\cos\left(\sqrt{1 - \frac{m\lambda}{L^2}}\theta\right)\,, \\ &= \frac{mk}{L^2 - \lambda m}(1 + e\cos(\beta\theta))\,. \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p'}(1 + e\cos(\beta\theta))\,, \qquad p' = \frac{L^2 - \lambda m}{mk}\,, \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{m\lambda}{L^2}}\,.$$

Así, finalmente la órbita de la partícula

$$r(\theta) = \frac{p'}{1 + e\cos(\beta\theta)}\,.$$

Problema 3

Una partícula de masa m bajo un campo central $F = -\frac{k}{r^2}$ describe una órbita circular de radio r_0, con rapidez v_0. Si la velocidad aumenta a $v = \sqrt{\alpha}v_0$, encuentre la ecuación de la órbita.

Solución

Para una partícula tenga una órbita circular, se tiene que cumplir

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}\,,$$

es decir,

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{mr_0}}\,. \tag{9}$$

Calculando la energía de la partícula para su velocidad original utilizando (9)

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}\,, \\ &= \frac{k}{2r_0} - \frac{k}{r_0}\,, \\ &= -\frac{k}{2r_0}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Calculando el momento angular de la partícula para su velocidad original utilizando (9)

$$\begin{aligned} L_0 &= mr_0v_0\,, \\ &= mr_0\sqrt{\frac{k}{mr_0}}\,, \\ &= \sqrt{mr_0k}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Calculando la energía de la partícula para su nueva velocidad

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r_0}\,, \\ &= \frac{\alpha}{2}mv^2 - \frac{k}{r_0}\,, \\ &= \frac{\alpha k}{2r_0} - \frac{k}{r_0}\,, \\ &= \frac{k}{r_0}\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\,, \\ &= -(2-\alpha)\frac{k}{2r_0}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Comparando (10) con (12) se puede observar

$$E = (2-\alpha)E_0\,. \tag{13}$$

Calculando el momento angular de la partícula para su nueva velocidad

$$\begin{aligned} L &= mr_0v\,, \\ &= mr_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mr_0}}\,, \\ &= \sqrt{\alpha}\sqrt{mr_0k}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

De manera análoga a la energía al comparar (11) con (14)

$$L = \sqrt{\alpha}\, L_0 \,. \tag{15}$$

Recordando que la expresión para la excentricidad consiste en

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2}{mk^2} E L^2} \,. \tag{16}$$

Reemplazando (15) y (13) en (16)

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2}{mk^2} E_0 L_0^2\, \alpha(2-\alpha)} \,. \tag{17}$$

Reemplazando (14) y (12) en (17)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{1 - \frac{2}{mk^2}\frac{k}{2r_0} m r_0 k\, \alpha(2-\alpha)} \,, \\ &= \sqrt{1 - 2\alpha + \alpha^2} \,, \\ &= \sqrt{(1-\alpha)^2} \,. \end{aligned} \tag{18}$$

Notemos que necesitamos que $\alpha > 1$, ya que asumimos que aumentaba la velocidad, es decir, $\epsilon = \alpha - 1$. Si se estuviese estudiando el problema en el cual la velocidad disminuye se escoge la otra solución.

La posición de la partícula se puede escribir como

$$r(\theta) = \frac{P}{1 + \epsilon \cos\theta} \,. \tag{19}$$

Se puede relacionar el momento angular con el momento lineal como

$$P = \frac{L^2}{mk} \,. \tag{20}$$

Reemplazando (14) en (20)

$$P = \alpha r_0 \,. \tag{21}$$

Reemplazando (18) y (21) en (19)

$$r(\theta) = \frac{\alpha r_0}{1 + (\alpha - 1)\cos\theta} \,.$$

Problema 4

Considere un satélite de masa m que orbita un planeta de masa M, alrededor del cual existe una distribución de polvo no-uniforme con un densidad $\rho(r) = \gamma r^{-4}$. Calcule el radio de la órbita del planeta en una trayectoria circular.

Solución

Sobre una esfera de de radio r la masa de polvo corresponderá a la densidad del polvo por el volumen de la esfera, es decir,

$$M_{\text{polvo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho. \tag{22}$$

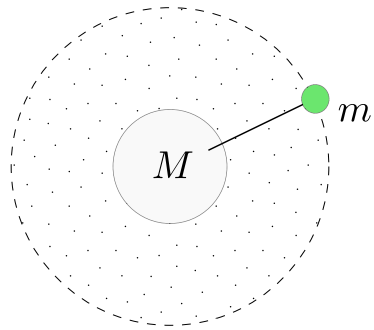

Figura 1: Esquema del problema 4

Reemplazando la densidad en (22)

$$\begin{aligned} M_{\text{polvo}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \gamma r^{-4}\,, \\ &= \frac{4}{3}\frac{\pi\gamma}{r}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Sabemos que la fuerza gravitacional por el efecto del polvo de cuerdo a las leyes de atracción se puede aproximar como

$$F' = -\frac{GmM_{\text{polvo}}}{r^2}\,. \tag{24}$$

¿Por qué esto es válido? ¿No se debería considerar la posición de cada pedazo de partícula de polvo y usar integrales para sumar cada pedazo infinitesimal de esta? La respuesta es que sí, pero si observamos que la densidad de polvo decae mientras más lejos de M estemos, existe un punto en el cual desde el punto de viste de m en el cual podemos considerar que todo el polvo está a una distancia r.

Continuando con el cálculo, al reemplazar (23) en (26)

$$F' = \frac{4\pi}{3}\frac{\gamma m G}{r^3}\,. \tag{25}$$

Si definimos la constante $k = \frac{4\pi\gamma G}{3}$, reescribimos esto como

$$F' = -\frac{km}{r^3}\,. \tag{26}$$

Definiendo θ como el ángulo del vector posición de la masa m, en (26) se sigue que de la segunda ley de Newton

$$m(a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}) = \left(-\frac{GMm}{r^2} - \frac{km}{r^3}\right)\hat{r}\,.$$

De la parte angular se tiene

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0\,.$$

De esto, sabemos que el momento angular se conserva, es decir,

$$L = mr^2\dot{\theta}\,. \tag{27}$$

De la parte radial

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{km}{r^3}, \tag{28}$$

con $\alpha = GMm$.

Las condiciones para tener una órbita circular son tener velocidad y aceleración radial nulas, es decir, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Utilizando esto en (28)

$$\frac{L^2}{mr^3} - \frac{km}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} = 0\,. \tag{29}$$

Se puede reescribir esta expresión como

$$\left(\frac{L^2}{m} - km\right)\frac{1}{r^3} = \frac{\alpha}{r^2}\,.$$

Si despejamos r, claramente se tiene

$$r = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{L^2}{m} - km\right)\,.$$

Reemplazando los valores de α y (27)

$$r = \frac{1}{GM}\left(\frac{L^2}{m^2} - k\right)\,.$$

Problema 5

Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular bajo la acción de la energía potencial $U = kr$. Calcule la energía y momento angular de dicha partícula.

Solución:

La fuerza que siente la partícula durante su trayectoria está dada por

$$F = -\frac{dU}{dr} = -k$$

Por ley de newton

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}) = -k$$

En un círculo $\ddot{r} = 0$, luego

$$mr\dot{\theta} = k$$
$$m\frac{r^2\dot{\theta}^2}{r} = k$$

Luego, como $v = r\dot{\theta}$ reescribiendo lo anterior

$$m\frac{v^2}{r} = k$$
$$mv^2 = kr \tag{30}$$

La energía de la partícula es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + kr$$

Usando (30) en esto último

$$E = \frac{1}{2}kr + kr = \frac{3}{2}kr$$

Por último el momentun angular de la partícula es

$$L = mrv = mr\sqrt{\frac{kr}{m}} = \sqrt{mkr^3}$$

Problemas propuestos

Problema 6

Encuentre el campo central que da origen a una órbita espiral $r = k\theta$, $k > 0$.

Problema 7

Un planeta esférico rota con una velocidad angular ω. Si la única fuerza que previene la desintegración es la gravedad, determine la densidad mínima del planeta

Problema 8

Considere una partícula de masa m en un campo central $\vec{f_1} = f(r)\hat{r}$. Demuestre que si existe una fuerza de roce $\vec{f_2} = \lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$ constante, el momento algular decae exponencialmente. Utilice que

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\alpha F(x)\,,$$

es decir,

$$F(x) = F_o e^{-\alpha x}\,.$$

Problema 9

Una partícula de masa m y velociad v_0 es desviada por un campo central repulsivo

$$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^2}\hat{r}\,.$$

Hacer figura
Determine la distancia de máximo acercamiento

Problema 10

La interacción entre un átomo y un ion está dada por la energía potencial

$$U(r) = -\frac{C}{r^4}\,,$$

con C una constante.
Determine el mínimo valor del potencial efectivo tal que el ion no pueda chocar con el átomo.