

## Tarea 5 Analisis abstracto II

3 de junio de 2022

**Nota:**  $\frac{\text{Puntos}}{4} + 1$

**Fecha de entrega: 16 de Junio**

Todas las respuestas deben ser justificadas

### Pregunta 1

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado real para el cual se cumple la identidad del paralelogramo

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ para todo } x \in X$$

Demostrar que la funcion  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$$

es un producto interno en  $X$

**Ayuda:** Para demostrar que  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  primero demostrar en el caso en que  $\alpha$  es racional, luego demostrar que la funcion  $\langle \cdot, y \rangle$  es continua

**(6 puntos)**

### Pregunta 2

Sea  $Y \subset \ell^2$  el conjunto

$$Y = \{x \in \ell^2 : x_{2n} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

Demostrar que  $Y$  es un subespacio cerrado y encontrar el conjunto  $Y^\perp$

**(6 puntos)**

### Pregunta 3

Sea  $X$  un espacio pre-Hilbert y  $E \subset X$  no vacio. Demostrar que  $E^{\perp\perp}$  es el menor subespacio cerrado que contiene a  $E$ .

**(6 puntos)**

### Pregunta 4

Sea  $x_n$  una sucesion en un espacio pre-Hilbert  $X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \|x\|^2$  para un  $x \in X$ . Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

**(6 puntos)**