MC-460 Geometría Diferencial. Apuntes del curso

Febrerol 28, 2021

Contents

1	Curvas en \mathbb{R}^n	2
2	Curvas planas I	19
3	Curvas planas II	36
4	Areas y perímetros	51
5	Curvas en el espacio	67
6	Variedades en \mathbb{R}^n	83
7	Superficies en el espacio	105
8	Geometría intrínseca de superficies	123
9	El Teorema de Gauss-Bonnet	143
10	Tensores y formas diferenciales	162

Capítulo 1

Curvas en \mathbb{R}^n

Introducción

Geometría diferencial es la rama de las Matemáticas que se encarga del estudio local de curvas, superficies, y variedades en general. Es decir, estudia las propiedades de estas en una vecindad de un punto. Esto no quiere decir que esta teoría no nos permita entender propiedades globales de las figuras, pero este estudio se realiza en términos de objetos locales. Por ejemplo, en este capítulo estudiaremos el largo de una curva, una propiedad global de la misma, en términos de una propiedad local, el elemento de longitud de arco, o, en un lenguaje más moderno el módulo de la derivada. Aquí el uso de herramientas del cálculo multivariado y el álgebra lineal es indispensable, por lo que supondremos que el lector está familiarizado con estos temas. Mas adelante, una cierta familiaridad con la teoría de ecuaciones diferenciales será conveniente. Advertiremos al lector cuando llegue el momento.

Solemos imaginar, intuitivamente, una curva plana como un alambre que se enrolla sin romperse. Matemáticamente, esta idea de no romper el alambre se modela mediante el concepto de función continua. En estas notas, una curva es una función continua α definida en algún intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tomando valores en algún espacio euclideano \mathbb{R}^n . Otra analogía útil es pensar en la curva como la trayectoria de un punto que se desplaza en función del tiempo. En este contexto, el parámetro tiempo varía de un instante inicial dado por t = a y un instante final t = b. El valor de la función $\alpha(t)$ nos dá la posición del punto en un instante intermedio dado t. En este sentído, podemos definir la parábola como la trayectoria de una bala disparada por un cañon, como el que se observa en la figura 1. Esta es, sin embargo, sólo una analogía y a menudo nos interesa poder cambiar un parámetro dado a priori por otro más conveniente. En el caso de una



Figura 1.1: La trayectoria de un proyectil describe una curva con el tiempo como un parámetro natural.

trayectoria, el tiempo no es, sinó, uno de los posibles parámetros.

Como la geometría diferencial se apoya mayoritariamente en las herramientas del cálculo diferncial, nos interesa particularmente, en estas notas, el caso en el que α es una función infinitamente diferenciable. Otras ramas de la matemática, como la topología, se interesan en curvas arbitrarias. Para nosotros la diferenciabilidad es esencial y será asumida en todo lo que sigue, a no ser que se especifique lo contrario.

Un ejemplo de curva no diferenciable es la curva de Peano. Una curva que llena el interior de un cuadrado, como la que se obtiene, mediante el proceso de paso al límite, con la construcción cuyos primeros pasos se ilustran en la figura 2. Las curvas diferenciables que se utilizan en la geometría diferencial no presentan este comportamiento patológico como veremos más adelante.

Figura 1.2: Primeros pasos en la construcción de la curva de Peano (Fuente:Wikipedia).

Puntos y vectores

Antes de comenzar, conviene establecer algunas notaciones básicas que corresponden al álgebra lineal, pero que no corresponden, necesariamente, con las notaciones que uno utilizaría en dicho curso. Haremos a menudo referencia al espacio euclideano \mathbb{R}^n , pero lo consideraremos bajo dos encarnaciones diferentes. Un conjunto de puntos P que interpretamos como una *n*-tupla de coordenadas $P = (a_0, \ldots, a_n)$, y un conjunto de vectores \vec{v} que se interpreta como una combinación lineal de vectores de una base canónica

$$\overrightarrow{v} = b_1 \overrightarrow{e}_1 + b_2 \overrightarrow{e}_2 + \ldots + b_n \overrightarrow{e}_n$$

Se nos enseña en un curso de álgebra lineal que ambos objetos son "lo mismo", y de hecha podemos usar la definición formal en términos de *n*-tuplas para ambos, pero jugarán un rol diferente en la geometría diferencial, cuya naturaleza se comprenderá mejor una vez hayamos estudiado la geometría intrínseca de superficies, tema en el cual las ideas de punto coordenado y vector tangente son interpretados como objetos en espacios completamente diferentes. Hasta ese punto, la distinción entre vectores y puntos debe interpretarse como una conveniencia notacional. En general asumiremos que la suma $\vec{v} + \vec{w}$ de vectores es un vector, que la suma $P + \vec{v}$ de un punto y un vector es otro punto, mientras que la suma de puntos no será considerada una operación bien definida.

Estas convenciones son naturales para quienes tienen una mentalidad física, puesto que la interpretación de un punto en el espacio como una 3tupla requiere la elección de un sistema de coordenadas, lo que incluye la elección arbitraria de un origen, mientras que un vector se visualiza como un "desplazamiento". La idea de espacio tangente elaborará, en un contexto mucho más abstracto, esta idea básica.

Curvas y vectores tangentes

Una curva es una función infinitamente diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, donde *I* es un intervalo (finito o infinito). La variable $t \in I$ recibe el nombre de parámetro, y la imagen $\alpha(I)$ se denomina trazo de la curva. Nótese que la imágen de la curva está formada por puntos. No los consideraremos, en general, como vectores.

Ejemplo 1.1. La recta que pasa por el punto $P = (a_0, \ldots, a_n)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + \ldots + b_n \vec{e}_n$ está parametrizada mediante $\alpha(t) = (a_0 + b_0 t, \ldots, a_n + b_n t) = P + t \vec{v}$ con $t \in \mathbb{R}$, con las

convecciones de coordenadas y adición vectorial descritas en el apartado anterior. Un ejemplo físico de este tipo de curva es la trayectirio de una



Figura 1.3: La recta y el círculo como curvas parametrizadas.

párticula que se mueve a velocidad constante. Nótese que, entre los instantes t = 0 y t = 1, la partícula se ha desplazado desde el punto P al punto $P + \vec{v}$, por lo que \vec{v} puede interpretarse como el desplazamiento unitario, o por unidad de tiempo, de la curva. Nótese que, $\alpha(t)$ está definida también para valores negativos de la variable (ver Fig. 1.3(A)).

Ejemplo 1.2. El círculo con centro P = (a, b) y radio r está parametrizado mediante la ecuación

$$\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t) = P + r\overrightarrow{\beta}(t), \qquad t \in [0, 2\pi).$$

En particular, $O + \overrightarrow{\beta}(t)$ parametriza el círculo de radio 1 centrado en el origen de coordenadas O = (0,0) (ver Fig. 1.3(B)), también llamado círculo unitario. Un círculo arbitrario puede interpretarse como un desplazamiento seguido de una ampliación o reducción (cambio de escala) del círculo unitario. El despazamiento está dado por el vector $\overrightarrow{p} = a \overrightarrow{e}_1 + b \overrightarrow{e}_2$ que satisface $O + \overrightarrow{p} = P$. Para el físico, existe un sistema de coordenadas apropiado en el cual ambos puntos coinciden. En este sentido, nuestra notación nos permite tratar los puntos como si fueran independientes de la elección de un origen.

Observese también que la ecuación que parametriza el círculo está definida para todo valor $t \in \mathbb{R}$, pero su trazo no crece ya que la curva definida sobre toda la recta real sólo recorre el círculo una y otra vez. este es un ejemplo de curva cerrada.



Figura 1.4: El círculo como una curva cerrada y periódica.

En la Figura 1.4 hemos dibujado unas flechas que denotan la dirección del movimiento. Vamos a darle un sentido preciso a esta noción, definiendo un vector que indica la dirección de movimiento puntual de una curva. Para la curva $\alpha(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$, el vector tangente se define por

$$\vec{\alpha}'(t) = a_1'(t) \vec{e}_1 + \ldots + a_n'(t) \vec{e}_n$$

Podemos interpretar este vector tangente como la derivada del vector posición

$$\vec{\alpha}(t) = a_1(t) \vec{e}_1 + \ldots + a_n(t) \vec{e}_n.$$

Nótese que el vector posición se relaciona con la curva mediante la relación $O + \vec{\alpha}(t) = \alpha(t)$, continuando con la costumbre de distinguir puntos de vectores.

Ejemplo 1.3. La curva

$$\alpha(t) = (t, |t|)$$

no es una curva diferenciable en ningún intervalo que contenga al 0, pues la función $t \mapsto |t|$ no es diferenciable en 0. esto significa que el vector tangente, por lo tanto, no existe en ese punto (ver Fig. 1.5(A)). Puede comprobarse que la curva de Peano, mencionada en la introducción, no tiene un vector tangente definido en ningún punto, es decir, las funciones que definen sus co-ordenadas no son derivables. En las aplicaciones, consideraremos a menudo curvas donde la derivada (y por lo tanto el vector tangente) se indefinen en un conjunto discreto de puntos, pero nunca en cada punto, ya que las herramientas de la geometría diferencial no son útiles en ese contexto. Este tipo

de puntos, en los que la derivada se indefine, reciben l nombre de vértices o cúspides.



Figura 1.5: Una"curva" con un vértice (A) y una parametrización de la hipérbola (B).

Ejemplo 1.4. La curva diferenciable definida por

$$\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t), \qquad t \in [-\infty, \infty)$$

recorre una rama de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Esto se obtiene de remplazar las funciones coordenadas $x = \cosh t$ e $y = \operatorname{senh} t$ en la ecuación

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$

Como el coseno hiperbólico es positivo, mientras que el seno hiperbólico es creciente, y satisface los límites

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{senh} t = \infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} \operatorname{senh} t = -\infty,$$

la rama de la hipérbola correspondiente a x > 0 es recorrida completa y cada punto de dicha rama corresponde a un único valor de t. Para la rama opuesta se requiere una parametrización distinta. Por ejemplo, puede utilizarse $\alpha(t) = (-\cosh t, \sinh t)$.

Ejemplo 1.5. La curva diferenciable definida por la ecuación

$$\alpha(t) = \Big(\cos t(2\cos t - 1), \sin t(2\cos t - 1)\Big), \qquad t \in [0, 2\pi),$$

puede graficarse utilizando las coordenadas polares. Estas, como el lector recordará, están dadas por la substitución

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Esto no quiere decir otra cosa que re-escribir la definición de α en la forma

$$\alpha(t) = \left(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)\right), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Por simple inspección de la definición obtenemos las fórmulas

$$r(t) = 2\cos t - 1, \qquad \theta(t) = t,$$

por lo que el parámetro t puede interpretarse como el ángulo θ . Nos gustaría interpretar estas fórmulas como las coordenadas polares del punto $\alpha(t)$ de la curva. Por otro lado, el gráfico de la función $r(\theta) = 2\cos\theta - 1$ es como se muestra en la Figura 1.6(A). Observamos que r(t) es positivo en los intervalos $[0, \frac{\pi}{3}]$ y $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$, pero negativo en el intervalo $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$, por lo que entre dichos ángulos, la curva aparece en la dirección opuesta cor respecto al origen. Obtenemos así la curva graficada en la Figura 1.6(B).



Figura 1.6: La curva del Ejemplo 1.5.

Las rectas marcadas corresponden a los ángulos $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Estas pueden interpretarse como las pendientes de los vectores tangentes a la curva en $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{5\pi}{3}$. Nótese que, aún cuando la curva se cruza a sí misma, de modo que los puntos correspondientes a estos dos valores del parámetro coinciden, los vectores tangentes correspondientes son diferentes. Recuérdese que la pendiente de un vector planar $\vec{v} = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$ se define como tan $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Ejercicios

- 1. Mostrar que ninguna curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ tiene como trazo las dos ramas de la hipérbola.
- 2. Demuestre que los vectores tangentes en el origen de la curva del ejemplo 1.5 tienen efectivamente la pendiente de las rectas indicadas.

- 3. Determine cuales de las siguientes funciones de un intervalo I en \mathbb{R} son curvas regulares.
- 4. Calcule el vector tangente de las siguientes curvas:
 - (a) $\alpha(t) = (t, t^2).$ (c) $\alpha(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t).$ (b) $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t).$ (d) $\alpha(t) = (e^t t^2, e^{t^2}).$
- 5. Se
a $f:I\to\mathbb{R}$ una función diferenciable, y se
a $\alpha:I\to\mathbb{R}^2$ la curva definida por

$$\alpha(t) = \left(t, f(t)\right)$$

Calcule la pendiente del vector tangente a α en función de f y sus derivadas.

- 6. Probar que si una curva tiene un vector posición que es perpendicular a su vector tangente en cada punto, la curva es un círculo centrado en el origen.
- 7. Sea α una curva cuyo vector tangente $\vec{\alpha}'$ es paralela al vector posición $\vec{\alpha}$ en cada punto. Que puede decirse de α ?
- 8. Sea α cualquier curva cuya imagen esté contenida en el conjunto

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | F(\vec{x}) = 0\}.$$

Probar que $\vec{\alpha}'$ es perpendicular al vector gradiente $\vec{\nabla} F$ en todo punto.

9. Sea α una curva tal que $\vec{\alpha}'(t) = -\vec{\alpha}(t)$ en cada punto. Encuentre α .

Reparametrizaciones

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva, y si $g : J \to I$ es una función continua estrictamente creciente, entonces $\alpha \circ g$ se denomina una reparametrización de la curva α . En particular, la curva original y su reparametrización tienen el mismo trazo. La relación

 α es una reparametrización de β

es una relación de equivalencia. A no ser que se especifique lo contrario, supondremos en lo que sigue que la función g es una función diferenciable con derivada estrictamente positiva. Esto se denomina una reparametrización suave. Si t_0 es un punto del intervalo I, el punto $g^{-1}(t_0) \in J$ se denomina el valor correspondiente a t_0 del nuevo parámetro.

Ejemplo 1.6. El círculo unitario tiene las parametrizaciones

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi),$$

у

$$\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \qquad t \in [0, \pi).$$

En este caso la función $g: [0, \pi] \to [0, 2\pi]$ es g(t) = 2t. La curva β representa la trayectoria de una partícula que se mueve al doble de velocidad que la descrita por la curva α . Al reparametrizar, es usual utilizar una letra distinta para el nuevo parámetro, por lo que a menudo escribiremos ecuaciones del tipo $\alpha(t) = \beta(\tau)$, donde $t = g(\tau) = 2\tau$. En este sentido, ayuda considerar a τ como una variable distinta del tiempo.

Ejemplo 1.7. La rama de la hipérbola parametrizada mediante

$$\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t), \qquad t \in [-\infty, \infty),$$

tiene la parametrización alternativa

$$\beta(t) = (\sec t, \tan t), \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

En este caso la función g que realiza el cambio de parámetro es

$$g(\tau) = \arctan\left(\operatorname{senh}\tau\right).$$

Ambas funciones, el arcotangente y el seno hiperbólico, son biyectivos en los intervalos respectivos. En particular, una partícula P_{β} cuya trayectoria está dada por la curva β describe la misma rama del arco-tangente que una partícula P_{α} cuya trayectoria está dada por la curva α . Nótese sin embargo que P_{β} escapa al infinito en tiempo finito. Alternativamente, puede interpretarse a τ como un parámetro que permanece acotado cuando P_{α} escapa al infinito.

Ejemplo 1.8. La curva parametrizada

$$\alpha(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t), \qquad t \in [0, 2\pi),$$

describe un segmento de recta que se repasa una y otra vez. Esta curva no es una reparametrización de la recta $\beta(t) = (t, 1 - t)$ puesto que la función $g(\tau) = \cos^2(\tau)$, la que sería nuestra candidata natural para un cambio de parámetro, no es biyectiva.



Figura 1.7: Una curva cíclica cuyo trazo es un segmento de recta.

Ejercicios

- 1. Encuentre las siguientes reparametrizaciones $\beta = \alpha \circ \phi$.
 - (a) $\alpha(t) = (t, t^2), \ \phi(t) = t^2.$
 - (b) $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t), \ \phi(t) = \operatorname{tan}^{-1}(t/2).$
 - (c) $\alpha(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t), \ \phi(t) = \tanh^{-1}(t/2).$
- 2. Demuestre que la relación "x es una reparametrización de y" es efectivamente una relación de equivalencia.
- 3. Muestre que la reparametrización del Ejemplo 1.7 tiene derivada positiva.
- 4. Encuentre una reparametrización de la recta con un parámetro acotado, como la del ejemplo 1.7.
- 5. Encuentre una curva cíclica cuyo trazo sea sólo la mitad inferior del círculo.
- 6. Para los siguientes pares de curvas, determine si la segunda es o no una parametrización de la primera en algún intervalo. En caso afirmativo, determine los mayores intervalos en los que esto ocurre.

(a)
$$\alpha(t) = (1 - t, t^2 - 2t), \beta = (\operatorname{sen} t, \cos^2 t).$$

(b) $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t), \beta(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right).$

(c)
$$\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t), \ \beta(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1}\right).$$

Reparametrización y vector tangente

Si $\beta = \alpha \circ g$ es una reparametrización de la curva α , se tiene por la regla de la cadena

$$\vec{\beta}'(\tau) = g'(\tau) \vec{\alpha}' \left(g(\tau) \right).$$

Esto se interpreta diciendo que la dirección del vector tangente es independiente de la parametrización pero su magnitud no lo es. Es importante considerar valores correspondientes de los respectivos parámetros. Si la curva α describe el movimiento de una partícula, su velocidad está dada, por definición, por el vector tangente $\vec{\alpha}'(t)$, mientras su rapidez, o velocidad escalar, está dada por el largo $|\vec{\alpha}'(t)|$.

Si la curva α tiene derivada no nula para cierto valor del parámetro, la regla de la cadena nos dice que cualquier reparametrización suave $\beta = \alpha \circ g$ tiene la misma propiedad para el valor correspondiente del nuevo parámetro. El punto correspondiente del trazo, el que no depende de la parametrización, se dice un punto regular de la curva. También diremos que la curva es regular para ese valor del parámetro. Un punto en el que la derivada de α se anula se denomina un punto singular de α . La ecuación precedente nos muestra que una reparametrización suave (o, como diremos tambien en lo sucesivo, regular) preserva los puntos regulares y singulares de la curva.

Si una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es regular en un punto t_0 , la recta tangente a la curva en el punto $\alpha(t_0)$ se define como la recta L_{t_0} que pasa por el punto $\alpha(t_0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{\alpha}'(t_0)$. En otras palabras

$$L_{t_0} = \{\lambda \stackrel{\rightarrow}{\alpha}'(t_0) + \alpha(t_0) | \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Nótese que dicha recta es la imagen de la curva regular $l(\lambda) = \lambda \vec{\alpha}'(t_0) + \alpha(t_0)$. Las curvas $l \neq \alpha$ satisfacen $\vec{\alpha}'(t_0) = \vec{l}'(0)$. La recta tangente tiene la misma derivada que la curva en ese punto. Más aún, el Teorema de Taylor nos dice que la curva tiene una expansión en serie del tipo

$$\alpha(t_0 + \lambda) = \alpha(t_0) + \lambda \Big(\overrightarrow{\alpha}'(t_0) + \overrightarrow{\epsilon}(\lambda) \Big),$$

donde $\overrightarrow{\epsilon}(\lambda)$ es un vector que se anula para $\lambda = 0$. Puede darse una ecuación de la recta tangente que no depende de la parametrización definiendo el vector tangente unitario

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\left|\vec{\alpha}'(t)\right|}.$$



Figura 1.8: Una curva y su recta tangente.

Dicho vector es independiente de la parametrización. La recta tangente puede ser definida por

$$l_1(\lambda) = \alpha(t_0) + \lambda \overrightarrow{T}(t_0).$$

Longitud de arco

El largo de una curva $\alpha : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$, dada por $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, se define mediante la integral

$$l(\alpha) = \int_{I} \left| \overrightarrow{\alpha}' \right| = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x'_{i}(t)^{2}\right) dt}.$$

En particular, para cada punto intermedio $t \in I$, el largo de la restricción de α al subintervalo (a,t) está dada por $s(t) = \int_a^t \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du$. La función s es una función creciente del parámetro t y su derivada es $s'(t) = \left| \overrightarrow{\alpha}'(t) \right| > 0$ en cada punto regular de la curva. Se sigue que s(t) es un cambio regular de parámetro. La reparametrización $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ se denomina la reparametrización por longitud de arco de la curva α . Nótese que

$$\vec{\beta}'(t) = \frac{1}{s'[s^{-1}(t)]} \vec{\alpha}'\left(s^{-1}(t)\right) = \frac{\vec{\alpha}'\left[s^{-1}(t)\right]}{\left|\vec{\alpha}'\left[s^{-1}(t)\right]\right|} = \vec{T}\left[s^{-1}(t)\right].$$

En particular, si se asume que una curva está parametrizada por longitud de arco, entonces su derivada es el vector tangente unitario en cada punto. Conversamente, si una curva α tiene esa propiedad, entonces la función longitud de arco está dada por

$$s(t) = \int_{a}^{t} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| \, du = \int_{a}^{t} 1 \, du = t - a,$$

de modo que, salvo por la elección arbitraria del punto inicial t = 0, el parámetro t es la longitud de arco. Muchas ecuaciones que veremos en capítulos posteriores se simplifican bastante al utilizar esta parámetrización. Notemos por ahora que el vector tangente unitario está dado por la derivada con respecto a este parámetro. En símbolos, escribimos esta relación como sigue:

$$\frac{d \overrightarrow{\alpha}}{ds} = \overrightarrow{T}$$

Ejemplo 1.9. Considere la parametrización del círculo unitario dada por $\alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$. El vector tangente está dado por

$$\vec{\alpha}'(t) = \frac{2}{(1+t^2)^2} \Big(-2t \vec{e}_1 + (1-t^2) \vec{e}_2 \Big),$$

por lo que su largo es $\frac{2}{(1+t^2)^2}(1+t^2)=\frac{2}{1+t^2}.$ Se sigue que la función longitud de arco está dada por

$$s(t) = \int_0^t \frac{2}{1+s^2} \, ds = \arctan \frac{t}{2},$$

lo que nos dá la reparametrización usual $\beta(s) = (\cos s, \sin s)$.

Ejemplo 1.10. Considere la parametrización del círculo de radio R dada por $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$. El vector tangente está dado por

$$\vec{\alpha}'(t) = R\left(\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2\right),$$

por lo que su largo es R. Se sigue que la función longitud de arco es s(t) = Rt, lo que nos dá la reparametrización

$$\beta(s) = \left(R\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right).$$

Ejemplo 1.11. Considere la curva dada por la parametrización

$$\alpha(t) = \left((\cos t)^2, (\sin t)^2\right).$$

El vector tangente está dado por

$$\vec{\alpha}'(t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t(-1, 1),$$

por lo que su largo es $2\sqrt{2} \operatorname{sen} t \cos t$. Se sigue que la función longitud de arco es

$$s(t) = \int_0^t 2\sqrt{2} \operatorname{sen} s \cos s \, ds = (\operatorname{sen} t)^2 \sqrt{2},$$

lo que nos dá la reparametrización $\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-s,s)$. En particular, la curva dada, en el intervalo en el cal es regular, es una recta.

Ejercicios

- 1. Para cada una de las reparametrizaciones de los ejemplos 1.6 y 1.7, determine la proporción entre los vectores tangentes de ambas curvas involucradas.
- 2. Sea α una curva parametrizada regular tal que $\overrightarrow{\alpha}'(t_0)$ no es vertical. Probar que x puede usarse como parametro en una vecindad de t_0 .
- 3. Si $\beta(t) = \alpha(c-t)$ para cierta constante t, demuestre que las reparametrizaciones de ambas curvas por longitud de arco satisfacen una relación similar. Es cierta la conversa?
- 4. Reparametrice la parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ por longitud de arco.
- 5. Encuentre la longitud de arco de la curva $\alpha(t) = (t^2 + 1, t, t^2)$.
- 6. Encuentre, en forma de integral, la función longitud de arco de una elipse. Puede probarse que esta integral no puede calcularse por métodos elementales.
- 7. Sea $\alpha: [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el ángulo, es decir:

$$\alpha(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$$

(a) encuentre una formula integral para la longitud de arco.

- (b) Utilice le fórmula obtenida para probar que el arco del círculo unitario que une (1,0) con (0,1) es mas corto que cualquier otra curva de este tipo que, manteniendose al exterior del círculo unitario, conecte ambo puntos.
- 8. Encuentre el largo de las siguientes curvas en el intervalo dado:
 - (a) $\alpha(t) = (t, t^2), I = (-2, 2).$ (b) $\alpha(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t), I = (0, \pi/2).$ (c) $\alpha(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t), I = (0, \pi).$ (d) $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right), I = (-\infty, \infty).$
- 9. Reparametrice las siguientes curvas por longitud de arco.
 - (a) $\alpha(t) = (t, t^2).$ (b) $\alpha(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t).$ (c) $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right).$
- 10. Sea α una curva tal que $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}' < -k$ para alguna constante k. Probar que $\alpha(t) = (0,0)$ para algún t si α está definida en un intervalo suficientemente grande. Probar con un ejemplo que la condición $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}' < 0$ no es suficiente.
- 11. Probar que una curva no acotada tiene largo infinito.
- 12. Dar un ejemplo de una curva acotada de largo infinito.
- 13. Calcule el largo de la espiral logaritmica de ecuación polar $r = ce^{-m\theta}$ en el intervalo $0 \le \theta < \infty$.
- 14. Probar que entre todas las curvas que unen los puntos (0,0) y (1,0), el segmento de recta es el que tiene la menor longitud (sugerencia: $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \ge x'$).

Curvas definidas por ecuaciones intrínsecas

En aplicaciones, a menudo se consideran curvas descritas, como subconjuntos del plano, por una ecuación del tipo F(x, y) = 0. De hecho, si F es una función diferenciable, con un gradiente no nulo en un punto dado, lo que escribimos como

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0,$$

emtonces la ecuación precedente realmente define una curva. Por ejemplo, si se tiene $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, el teorema de la función implícita nos dice que existe una vecindad del punto (x_0, y_0) en el cual las soluciones de la ecuación tienen la forma (x, f(x)), siendo f una función continua tal que $f(x_0) =$ y_0 . Se sigue que el conjunto solución de F(x, y) = 0 es la imagen de la curva $\alpha(t) = (t, f(t))$, la que es no singular, dado que el vector tangente $\vec{\alpha}'(t) = \vec{e}_1 + f'(x) \vec{e}_2$ es siempre no nulo. Por abuso de lenguaje se habla de la curva F(x, y) = 0. Nótese, sin embargo, que la parametrización no es única. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es cualquier parametrización del conjunto solución de F(x, y) = 0, la regla de la cadena nos dice que

$$x'(t)\frac{\partial F}{\partial x}\Big(x(t), y(t)\Big) + y'(t)\frac{\partial F}{\partial y}\Big(x(t), y(t)\Big) = 0.$$

En particular, el vector tangente a la curva es perpendicular al gradiente. Se sigue que la ecuación intrínseca de la recta tangente en t_0 esta dada por

$$\left(x - x(t_0)\right)\frac{\partial F}{\partial x}\left(x(t_0), y(t_0)\right) + \left(y - y(t_0)\right)\frac{\partial F}{\partial y}\left(x(t_0), y(t_0)\right) = 0.$$

Ejemplo 1.12. El círculo de ecuación $F(x, y) = y^2 + x^2 - 1 = 0$ se puede parametrizar mediante $\alpha(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$. El punto t = 0 es un punto singular de la curva así parametrizada. Sin embargo, como el gradiente no se anula en dicho punto, el teorema de la función implícita implica la existencia de una parametrización alternativa en la cual dicho punto es regular. En este caso se trata de la parametrización usual del círculo.

Ejemplo 1.13. La cuva de ecuación $F(x, y) = y^2 - x^3 = 0$ se puede parametrizar mediante $\alpha(t) = (t^2, t^3)$. El punto t = 0 es un punto singular de la curva, con dicha parametrización. En este caso F tiene ambas derivadas nulas en el origen, por lo que el teorema de la función implícita no entrega una reparametrización que haga la curva regular. De hecho puede probarse que dicha parametrización no puede existir. A grandes rasgos, el razonamiento es como sigue. Si nos aproximamos al punto singular por abajo, el vector tangente unitario converge a un vector que apunta hacia la izquierda. Si nos aproximamos por abajo, el vector límite apunta hacia la derecha. Concluimos que el vector límite en el punto singular no existe. En casos como éste, se dice que la curva posee una cúspide. Nótese que el ángulo de la Figura 1.5A es otro ejemplo de ete fenómeno.



Figura 1.9: Una curva con una cúspide.

Ejercicios

- 1. Convierta el argumento del ejemplo 1.13 en una demostración formal.
- 2. Encuentre los puntos (x_0, y_0) donde el gradiente de la función $F(x, y) = x^2 y^2$ se anula. Muestre que el conjunto definido por la ecuación $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ no es el trazo de una curva en ninguna vecindad de tal punto.
- 3. Parametrize la curva en la que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intersecta al plano z = x + y.
- 4. Razonando como en la sección precedente, bajo que hipótesis es posible probar, utilizando el teorema de la función implícita, que un subconjunto del espacio tridimensional dado por dos ecuaciones

$$F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$$

es una curva en una vecindad de un punto dado? Generalice a curvas en \mathbb{R}^n .

Capítulo 2

Curvas planas I

Tangente y normal

En este capítulo, consideramos sólo curvas α con trazo en \mathbb{R}^2 . Cada vez que el parametro se denote por la letra *s*, supondremos que es la longitud de arco.

Nótese que, como el vector tangente \vec{T} tiene largo 1, para cada valor del parámetro s se tiene $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = 1$. Derivando esta ecuación se obtiene

$$\overrightarrow{T}'(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = 0.$$

Se concluye que la derivada de \overrightarrow{T} , con respecto a la longitud de arco, es un vector perpendicular a \overrightarrow{T} en cada punto. Definimos $k(s) = |\overrightarrow{T}'(s)|$ y $\overrightarrow{N}(s) = \overrightarrow{T}'(s)/k(s)$ si $k(s) \neq 0$. Estos reciben los nombres de curvatura y vector normal unitario, respectivamente. Nótese que \overrightarrow{N} es también un vector unitario, por lo que el mismo razonamiento anterior se aplica y concluimos que \overrightarrow{N}' debe ser paralelo (o antiparalelo) a \overrightarrow{T} . De hecho, al derivar la relación $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ se obtiene

$$\vec{T}' \cdot \vec{N} + \vec{T} \cdot \vec{N}' = 0,$$

y como $\vec{T}' = k \vec{N}$ se concluye que $\vec{T} \cdot \vec{N}' = -k$, en decir $\vec{N}'(s) = -k(s) \vec{T}(s)$. Los vectores \vec{T} y \vec{N} forman una base ortonormal de \mathbb{R}^2 en cada punto

Los vectores T y N forman una base ortonormal de \mathbb{R}^2 en cada punto en que la curvatura es no nula. Reciben el nombre de sistema de referencia móvil de la curva.

Ejemplo 2.1. El círculo de ecuación $\beta(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right)$ se encuentra ya parametrizado por longitud de arco. El vector tangente unitario es

$$\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = -\sin\frac{s}{R} \vec{e}_1 + \cos\frac{s}{R} \vec{e}_2.$$

Derivando una vez más se obtiene

$$\vec{T}'(s) = \frac{1}{R} \left(-\cos\frac{s}{R} \vec{e}_1 - \sin\frac{s}{R} \vec{e}_2 \right),$$

Por lo que la curvatura y el vector normal unitario están dados por el par de fórmulas

$$k(s) = \frac{1}{R}, \qquad \stackrel{\rightarrow}{N}(s) = -\stackrel{\rightarrow}{\beta}(s).$$

Por analogía con este último ejemplo, para cualquier curva β , la que podemos asumir parametrizada por longitud de arco, el círculo de radio $r(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$ centrado en el punto $\beta(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \overrightarrow{N}(s_0)$ recibe el nombre de círculo de curvatura de la curva β correspondiente al valor $s = s_0$ del parámetro. El valor $r(s_0)$ se denomina radio de curvatura.

Ejemplo 2.2. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva de curvatura constante $k(s) = k_0$. En este caso, el círculo de curvatura tiene centro $\epsilon(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} \overrightarrow{N}(s)$, y se tiene

$$\vec{\epsilon}'(s) = \vec{\alpha}'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)} \vec{N}(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{N}'(s) = \vec{T}(s) - 0 + \frac{1}{k(s)} [-k(s) \vec{T}(s)] = 0.$$

Se sigue que $\epsilon(s) = \epsilon_0$ es constante. Como tambien es constante el radio de curvatura, se sigue que α es un círculo centrado en el punto ϵ_0 .

En general, el círculo de curvatura es el círculo que mejor se ajusta a la curva (ver Fig. 2.1). Para comprobar esto asumamos que en el punto s = 0 se tiene $\alpha(0) = (0,0), \vec{T}(0) = \vec{e}_1, y \vec{N}(0) = \vec{e}_2$. Un círculo parametrizado por longitud de arco que sea tangente a la curva en el origen tiene necesariamente una ecuación del tipo

$$\gamma(s) = (0, R) + R \left(\operatorname{sen} \frac{s}{R} \stackrel{\overrightarrow{e}_1}{e}_1 - \cos \frac{s}{R} \stackrel{\overrightarrow{e}_2}{e}_2 \right)$$
$$= (0, 0) + s \stackrel{\overrightarrow{e}_1}{e}_1 + \frac{s^2}{2R} \stackrel{\overrightarrow{e}_2}{e}_2 + \dots$$

Recordemos que la curva α se parametriza en una vecindad de 0 mediante

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s \overrightarrow{\alpha}'(0) + \frac{s^2}{2} \overrightarrow{\alpha}''(0) + \dots$$

$$= (0,0) + s \stackrel{\rightarrow}{e}_1 + \frac{s^2 k(0)}{2} \stackrel{\rightarrow}{e}_2 + \dots$$

Se sigue es dicho círculo aproxima la curva a un orden mayor a s^2 si y sólo si $R = \frac{1}{k(0)}$.



Figura 2.1: El círculo de curvatura.

Ejercicios

- 1. Probar que si la curvatura de una curva (plana o no) α es nula, la curva es una recta.
- 2. Probar que si una curva plana tiene un vector normal constante, entonces es una recta.
- 3. Encuentre todas las curvas que satisfacen la relación $\vec{T}(s) = \cos(s) \vec{e}_1 + \sin(s) \vec{e}_2$.
- 4. Encuentre todas las curvas que satisfacen la relación $\overrightarrow{N}(s) = \cos(s) \overrightarrow{e}_1 + \sin(s) \overrightarrow{e}_2$.
- 5. Calcule el círculo de curvatura de la parabola $y = x^2$ en el origen. Encuentre el círculo de curvatura de la parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ en el punto t = 1/2.
- 6. Calcule el círculo de curvatura de la elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

en cada uno de los puntos donde la curva intersecta los ejes de coordenadas.

- 7. Sea α una curva parametrizada tal que el vector posición $\vec{\alpha}(t)$ y el vector normal $\vec{N}(t)$ son antiparalelos en cada punto. Probar que α es un círculo.
- 8. Sea α una curva tal que los vectores $-\overrightarrow{\alpha}(s)$ y $-\overrightarrow{T}(s)$ subtienden un ángulo constante $\eta < \pi/2$ en cada punto. Derivando los productos escalares $\overrightarrow{\alpha}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s)$ y $\overrightarrow{\alpha}(s) \cdot \overrightarrow{N}(s)$ obtenga una expresión para la derivada r'(s) del largo $r(s) = |\overrightarrow{\alpha}(s)|$ del vector posición.
- 9. (Problema de los escarabajos). En cada uno de los vértices de un cuadrado, como el que muestra la Figura 2.2, se encuentra un escarabajo. Cada escarabajo camina a velocidad constante, siempre en



Figura 2.2: El problema de los escarabajos.

la dirección en la que se encuentra el escarabajo siguiente, hasta que al final todos se reunen en el centro del cuadrado. Calcule el largo del camino recorrido por cada escarabajo. Generalice a un polígono de n lados (Sugerencia: utilizando el ejercicio precedente, calcule $\int_0^L r'(s) ds$ de dos maneras distintas).

10. Probar que las curvas de los dos problemas precedentes tienen una curvatura que es inversamente proporcional al largo del vector posición.

Número de vueltas de una curva alrededor de un punto

Consideremos una curva del tipo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, cuyo trazo no contiene al origen. Nos preguntamos como puede definirse en forma consistente el ángulo $\theta(t)$ que subtiende el vector posición $\vec{\alpha}(t)$ con un vector fijo dado, que para fijar ideas asumiremos que es el primer vector \vec{e}_1 de la base canónica. En principio uno podría definir este ángulo mediante la fórmula

$$\tan\left(\theta(t)\right) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Esto tiene algunos defectos. La función inversa de la tangente, el arcotangente, está definida sólo salvo multiplos enteros de π . Esto se resuelve a menudo escogiendo una rama del arcotangente, por ejemplo aquel que toma valores en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. También se indefine cuando la abscisa x(t) se anula. Esto último puede remediarse asignando un valor en $\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}$ al ángulo para dichos valores del argumento t, pero es imposible, a menudo hacer esto de forma que se obtenga una función ángulo continua. Hay dos maneras de sortear esta dificultad. Una de ellas depende del uso de derivadas, por lo que está limitada a curvas diferenciables, pero no la otra, la que tiene una naturaleza puramente topológica.

Comenzamos con la solución "diferencial". Para esto se deriva la ecuación anterior:

$$\left(\tan^2\left(\theta(t)\right) + 1\right)\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}.$$

Utilizando nuevamente la fórmula para la tangente se obtiene

$$\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)}$$

Esto nos dá una fórmula bien definida para la derivada del ángulo que puede utilizarse para definir esta última función mediante la integral siguiente:

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \theta(\tau) \, d\tau = \int_{t_0}^t \frac{y'(\tau)x(\tau) - y(\tau)x'(\tau)}{x^2(\tau) + y^2(\tau)} \, d\tau.$$

La solución "topológica" se obtiene mostrando que es posible subdividir el intervalo de definición [a, b] de la curva utilizando una partición $a = t_0 <$

 $t_1 < \cdots < t_n = b$ lo bastante fina para que, en cada uno de los intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ exista una coordenada, ya sea x o y, que no se anula en ningún punto de dicho intervalo. De este modo, se puede definir la función ángulo secuencialmente un cada uno de estos intervalos, mediante el arcotangente o el arco-cotangente según corresponda, ajustando las ramas de manera que se obtenga una función continua. Los detalles de esta construcción se dejan como ejercicio para el lector.

De un modo u otro, se deduce que una curva cerrada, la que tiene la propiedad de que $\alpha(b) = \alpha(a)$, debe complir necesariamente que $\theta(b) - \theta(a)$ es un múltiplo de 2π , es decir un elemento de $2\pi\mathbb{Z}$, al que se denomina número de vueltas de la curva. El número de vueltas es un invariante topológico esencial. Mediante este invariante pueden determinarse algunas propiedades importantes, como el llamado "tipo de homotopía". Estas costrucciones se detallan en los ejercicios.

Ejercicios

- 1. Rellene los detalles de la construcción de la función ángulo mediante particiones esbozada en el texto.
- 2. Demuestre que, para cada par de valores t y t' del parametro que satisfacen $\alpha(t) = -\alpha(t')$, se tiene que $\theta(t) = \alpha(t') + n\pi$ con un valor impar de n. Del mismo modo, para cada par de valores t y t' del parametro que satisfacen $\alpha(t) = \alpha(t')$, se tiene que $\theta(t) = \alpha(t') + n\pi$ con un valor par de n. Sugerencia: Dividir el plano sin origen en sectores que corresponden, vía la función ángulo, a intervalos cuyos bordes deben cruzarse para pasar de un valor a otro del ángulo, como muestra la Figura 2.3.



Figura 2.3: División de la recta en intervalos sugerida en el Ejercicio 2.

3. La función exponencial compleja exp : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ esta definida mediante la fórmula

$$\exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

Muestre que para toda curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, cuyo trazo no contiene al origen existe una curva $\beta(t)$ que satisface la ecuación $\alpha(t) = \exp \circ \beta(t)$.

- 4. Utilizando el teorema de la función inversa del cálculo multivariado, muestre que la función exponencial compleja tiene una inversa en una vecindad de cualquier punto. Utilice este hecho para dar otra demostración de la existencia de la función ángulo.
- 5. Mediante un desplazamiento, defina el número de vueltas de una curva alrededor de cualquier punto fuera de su trazo.

La curvatura como derivada del ángulo

Otra interpretación de la curvatura es la de derivada del ángulo formado por el vector tangente unitario y el eje X. Precisaremos ahora esa noción. Si α está parametrizada por longitud de arco, el vector tangente unitario puede escribirse en la forma

$$\vec{T}(s) = \cos\theta(s) \vec{e}_1 + \sin\theta(s) \vec{e}_2 .$$

Derivando esta ecuación se tiene

$$\vec{T}'(s) = k(s) \vec{N}(s) = \theta'(s) \Big(-\sin\theta(s) \vec{e}_2 + \cos\theta(s) \vec{e}_2 \Big).$$

De aquí se concluyen las identidades

$$k(s) = \pm \theta'(s) \text{ y } \overrightarrow{N}(s) = \pm \left(-\sin\theta(s) \overrightarrow{e}_1 + \cos\theta(s) \overrightarrow{e}_2 \right).$$

De aqu'i concluímos, la relación $k(s) = |\theta'(s)|$, dado que por definición la curvatura es positiva. Utilizando esta interpretación puede demostrarse el siguiente resultado:

Proposición 2.3. Sea α una curva con curvatura no nula en el punto s = 0. Entonces, existe un intervalo abierto que contiene a 0 en el cual la curva está contenida en uno de los semiplanos determinados por la recta tangente en s = 0. Es decir, la curva no corta su tangente en este punto como en Fig. 2.4(A).



Figura 2.4: Una curva con curvatura estrictamente positiva con su tangente (A) y dos curvas tangentes con distinta curvatura (B).

Demostración. Denotemos la curva por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Mediante un cambio de coordenadas, podemos suponer que $\alpha(0) = (0, 0)$, que su tangente es $\overrightarrow{T}_{\alpha}(0) = \overrightarrow{e}_1$, y que su normal es $\overrightarrow{N}_{\alpha}(0) = \overrightarrow{e}_2$. Utilizando las identidades $\overrightarrow{T}_{\alpha}(s) = x'(s) \overrightarrow{e}_1 + y'(s) \overrightarrow{e}_2$ y $k_{\alpha}(s) \overrightarrow{N}_{\alpha}(s) = x''(s) \overrightarrow{e}_1 + y''(s) \overrightarrow{e}_2$, concluímos que y'(0) = 0 e y''(0) = k(0) > 0. Se concluye que y(s) tiene un mínimo estricto en s = 0, de donde el resultado sigue.

Proposición 2.4. Sean α y β dos curvas tangentes en s = 0. Supongamos que $k_{\alpha}(s) > k_{\beta}(s)$. Entonces las curvas no se cortan en dicho punto, es decir, existe una vecidad en la que una curva queda al mismo lado de la otra como se ve en la Figura 2.4(B).

Antes de iniciar la demostración queremos observar el hecho de que, en principio, la afirmación anterior requiere probar que existe una vecindad en la que los conceptos de lado derecho y lado izquierdo de la curva están bien definidos. No entraremos en esta discusión aquí, pero algunas indicaciones de como encarar este tema se dejan en los ejercicios.

Demostración. Si los vectores normales tienen dirección opuesta, el resultado sigue fácilmente de la proposición anterior, como el lector podrá comprobar fácilmente. En lo que sigue, supondremos que los vectores normales coinciden. Supongamos, como antes, que $\alpha(0) = \beta(0) = (0,0)$, y que además

 $\vec{T}_{\alpha}(0) = \vec{T}_{\beta}(0) = \vec{e}_1, \qquad \vec{N}_{\alpha}(0) = \vec{N}_{\beta}(0) = \vec{e}_2.$

En particular, $x'_{\alpha}(0) = x'_{\beta}(0) = 1$, por lo que ambas curvas se pueden parametrizar en términos del parámetro x en una vecindad de 0, por el

teorema de la función implícita. Digamos que $y_{\alpha}(s) = f_{\alpha}[x_{\alpha}(s)]$ y $y_{\beta}(s) = f_{\beta}[x_{\beta}(s)]$ en alguna vecindad de s = 0. Bastará con probar que $f_{\alpha}[x] - f_{\beta}[x]$ no cambia de signo en una vecindad de x = 0, es decir que tiene un extremo estricto en este punto. Pareciera que uno puede razonar como en la demostración precedente, pero hay una dificultad. Utilizar el hecho de que la curvatura nos dá la segunda derivada de la coordenada y en cada caso sólo nos permite comparar puntos correspondientes a valores similares del parámetro s, no del parámetro x. Esto nos obliga a calcular las derivadas de f_{α} y f_{β} en su lugar. Para ello realizamos el cálculo siguiente:

$$f'_{\alpha}[x_{\alpha}(s)] = \frac{y'_{\alpha}(s)}{x'_{\alpha}(s)} = \frac{\operatorname{sen} \theta_{\alpha}(s)}{\cos \theta_{\alpha}(s)} = \tan \theta_{\alpha}(s).$$

En términos de la función inversa u_{α} de x_{α} , la que existe en una vecindad de x = 0, por el teorema de la función inversa, se tiene $f'_{\alpha}[x] = \tan \theta_{\alpha}[u_{\alpha}(x)]$. Observemos ahora que

$$f'_{\alpha}[0] = \tan\left[\theta_{\alpha}\left(u_{\alpha}(0)\right)\right] = \tan(0) = 0,$$

y que

$$f_{\alpha}''[0] = u_{\alpha}'(0)\theta_{\alpha}'\left(u_{\alpha}(0)\right)\sec^{2}\left[\theta_{\alpha}\left(u_{\alpha}(0)\right)\right]$$
$$= \frac{k_{\alpha}\left(u_{\alpha}(0)\right)}{x_{\alpha}'\left(u_{\alpha}(0)\right)}\sec^{2}\left[\theta_{\alpha}\left(u_{\alpha}(0)\right)\right] = \frac{k_{\alpha}(0)}{x_{\alpha}'(0)}\sec^{2}(0) = k_{\alpha}(0).$$

Lo mismo se aplica a β , por lo que, como antes, la función $f_{\alpha}[x] - f_{\beta}[x]$ tiene una primera derivada nula y una segunda derivada no nula en 0. Mas precisamente

$$(f_{\alpha} - f_{\beta})'(0) = k_{\alpha}(0) - k_{\beta}(0) > 0,$$

de donde se obtiene lo pedido.

Proposición 2.5. Sean $\alpha \ y \ \beta$ dos curvas tangentes en s = 0. Supongamos que la diferencia de curvaturas $k_{\alpha}(s) - k_{\beta}(s)$ tiene un cero aislado en 0, es decir, su derivada no se anula en ese punto. Supongamos, además, que las normales $\vec{N}_{\alpha}(0) \ y \ \vec{N}_{\beta}(0)$ coinciden. Entonces las curvas $\alpha \ y \ \beta$ efectivamente se cortan en dicho punto como en la Figura 2.4.



Figura 2.5: Dos curvas tangentes que se cruzan.

Demostración. Como en las proposiciones anteriores, suponemos que $\alpha(0) = \beta(0) = (0,0)$, que $\overrightarrow{T}_{\alpha}(0) = \overrightarrow{T}_{\beta}(0) = \overrightarrow{e}_1$, y que $\overrightarrow{N}_{\alpha}(0) = \overrightarrow{N}_{\beta}(0) = \overrightarrow{e}_2$. Sean f_{α} , f_{β} , u_{α} y u_{β} como antes. El mismo razonamiento que en la demostración anterior nos prueba que en este caso

$$f'_{\alpha}[0] - f'_{\beta}[0] = f''_{\alpha}[0] - f''_{\beta}[0] = 0.$$

Bastará, pues, probar que la segunda derivada cambia de signo en 0. Para esto, calculamos una expansión de Taylor a primer orden de la expresión

$$f_{\alpha}''[x] = \frac{k_{\alpha}\left(u_{\alpha}(x)\right)}{x_{\alpha}'\left(u_{\alpha}(x)\right)} \sec^{2}\left[\theta_{\alpha}\left(u_{\alpha}(x)\right)\right].$$

Nótese que se tiene $u_{\alpha}(x) = x + O(x^2)$, dado que $u_{\alpha}(0) = 0$ y $u'_{\alpha}(0) = 1$. Del mismo modo se tiene $\theta_{\alpha}(u) = k_{\alpha}(0)u + O(u^2)$ y $x'_{\alpha}(u) = 1 + ux''_{\alpha}(0) + O(u^2)$. Por otro lado, el polinomio de Taylor de primer orden de la secante es igual a 1 pues su derivada en 0 se anula. Concluimos que

$$f_{\alpha}''[x] = \frac{k_{\alpha}(0) + xk_{\alpha}'(0)}{1 + xx_{\alpha}''(0)} + O(x^2).$$

Dado que la curva está parametrizada por longitud de arco, $x''_{\alpha}(0)$ es la primera coordenada del vector normal en 0 y por lo tanto se anula. Concluímos que

$$f''_{\alpha}[x] = k_{\alpha}(0) + xk'_{\alpha}(0) + O(x^2)$$

Lo mismo se aplica a la curva β , por lo que se tiene

$$f_{\alpha}''[x] - f_{\beta}''[x] = \left(k_{\alpha}(0) - k_{\beta}(0)\right) + x\left(k_{\alpha}'(0) - k_{\beta}'(0)\right) + O(x^2),$$

de donde se sigue lo pedido.

Ejemplo 2.6. Si β es el círculo de curvatura de la curva α correspondiente al valor s = 0 del parámetro, entonces $k'_{\beta}(0) = 0$, por lo que concluímos que la curva cruza a su círculo de curvatura en cualquier punto donde la derivada de k_{α} no se anule. Los puntos donde la derivada de la curvatura se anula son denominados vértices de la curva en la literatura, si bien este término se reserva, a veces, a los puntos en los que la curvatura alcanza un máximo o un mínimo. Nosotros adoptaremos esta última convención en nuestra discusión del Teorema de los cuatro vértices que se encuentra en el capítulo siguiente. El resultado precedente no dá información respecto del comportamiento del círculo de curvatura en un vértice.

Para poder realizar cálculos explícitos, es a menudo conveniente tener una fórmula para la curvatura con respecto a un parámetro diferente de la longitud de arco. Sea $\alpha = \alpha(t)$ una curva regular arbitraria. Notemos que el vector unitario \vec{T} puede escribirse como función de un parámetro tarbitrario mediante la fórmula $\vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{|\vec{\alpha}'(t)|}$. En otras palabras, podemos escribir $\vec{\alpha}'(t) = |\vec{\alpha}'(t)| T(t)$. Por otro lado, la longitud de arco se calcula mediante la ecuación $\frac{ds}{dt} = |\vec{\alpha}'(t)|$. Se sigue que la curvatura puede calcularse como sigue:

$$k(t) \overrightarrow{N}(t) = \frac{d}{ds} \overrightarrow{T}(t) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{ds/dt} \frac{d}{dt} \overrightarrow{T}(t) = \frac{\frac{d}{dt} \overrightarrow{T}(t)}{\left|\overrightarrow{\alpha}'(t)\right|}.$$

Por este razón, la curvatura está dada por $k(t) = \frac{\left|\frac{d}{dt}\vec{T}(t)\right|}{\left|\vec{\alpha}'(t)\right|}$. Si fijamos la notación para las coordenadas de la curva mediante $\alpha(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, entonces podemos escribir

$$\vec{T}(t) = \frac{x'(t) \vec{e}_1 + y'(t) \vec{e}_2}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

En este punto, los cálculos se vuelven algo complejos, por lo que omitiremos el parámetro y utilizaremos la convención de que todos las derivadas son con respecto al parámetro t.

$$\frac{d}{dt} \vec{T} = \frac{x'' \vec{e}_1 + y'' \vec{e}_2}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} - \frac{x'x'' + y'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \left(x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{\left(x''(y')^2 - y'y''x'\right)\vec{e}_1 + \left(y''(x')^2 - x'x''y'\right)\vec{e}_2}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}\left(y'\vec{e}_1 - x'\vec{e}_2\right).$$

El vector en paréntesis en esta última expresión tiene el mismo largo que $\vec{\alpha}'$. Se sigue que la curvatura está dada por la fórmula

$$k(t) = \frac{|x''y' - y''x'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Ejemplo 2.7. una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

con b>a,tiene la parametrización $\alpha(t)=(b \sin t, a \cos t).$ Se sigue que la curvatura está dada por

$$k(t) = \frac{ab}{\left((a \sec t)^2 + (b \cos t)^2\right)^{3/2}}.$$

Luego, los vértices se obtienen calculando los extremos de la función

$$(a \operatorname{sen} t)^{2} + (b \cos t)^{2} = a^{2} + (b^{2} - a^{2}) \cos^{2} t.$$

Se sigue que la elipse tiene cuatro vértices, a saber:

- 1. Los puntos $\pm(0, a)$ donde la curvatura es $k(0) = k(\pi) = a/b^2$.
- 2. Los puntos $\pm(b,0)$ donde la curvatura es $k(\pi/2) = k(3\pi/2) = b/a^2$.

En el primer caso, el círculo de curvatura es exterior a la elipse, mientras que en el segundo es interior. En ningún caso corta la elipse en el punto.

Ejercicios

1. Probar que en un vértice donde la segunda derivada de la curvatura no se anula, la curva no corta su círculo de curvatura (Sugerencia: Repita la demostración de la Proposición 2.7, pero utilizando una expansión de Taylor a segundo orden).

- 2. Verifique las afirmaciones hechas al final del último ejemplo de la sección precedente. Tanto directamente como utilizando el ejercicio precedente.
- 3. Probar que una hipérbola tiene curvatura maximal en sus vértices y esta decrece monotonamente en cada rama. Calcule la curvatura límite cuando el punto tiende a infinito.
- 4. Calcule la curvatura de la espiral de arquimides de ecuación polar $r = \theta$.
- 5. Calcule la curvatura de la cicloide de ecuación $x = u \operatorname{sen} u, y = 1 \cos u$.
- 6. Probar que cada círculo de curvatura de una elipse tiene exactamente tres puntos en común con la elipse. Puede usar como conocido el hecho de que un círculo o elipse se cortan en cuatro puntos a lo más.

Curvas cerradas y Curvatura total

Para nosotros, una curva cerrada es una curva α para la cual existe un periodo p que satisface $\alpha(t + p) = \alpha(t)$. Esta propiedad no es invariante bajo parametrizaciones. Por ejemplo, la curva $\alpha(t) = (\cos t^3, \sin t^3)$ es una reparametrización de círculo que no es una curva cerrada. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.8. La reparametrización por longitud de arco de una curva cerrada es una curva cerrada.

Demostración Basta ver que, si α es una curva cerrada, entonces cumple la relación

$$s(t+p) = \int_{t=0}^{p} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du + \int_{t=p}^{t+p} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du$$
$$= \int_{t=0}^{p} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du + \int_{t=0}^{t} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u+p) \right| du$$
$$= \int_{t=0}^{p} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du + \int_{t=0}^{t} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du = \int_{t=0}^{p} \left| \overrightarrow{\alpha}'(u) \right| du + s(t)$$

Concluímos que s(t + p) = s(t) + q, por lo que la inversa s^{-1} satisface $s^{-1}(r+q) = s^{-1}(r) + p$. Se sigue que la reparametrización β por longitud

de arco satisface

$$\beta(r+q) = \alpha \left(s^{-1}(r+q) \right) = \alpha \left(s^{-1}(r) + p \right) = \alpha \left(s^{-1}(r) \right) = \beta(s).$$

Nos referiremos al número q de la demostración anterior como el largo de un periodo de la curva. El siguiente resultado se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 2.9. Si q es el largo de un periodo de una curva serrada, esta satisface las relaciones $\overrightarrow{T}(s+q) = \overrightarrow{T}(s)$, $\overrightarrow{N}(s+q) = \overrightarrow{N}(s)$ y k(s+q) = k(s). Además, si la curva es regular, y si θ es el ángulo que forma la tangente con la horizontal, es decir $\overrightarrow{T}(s) = \cos \theta(s) \overrightarrow{e}_1 + \sin \theta(s) \overrightarrow{e}_2$, entonces $\theta(s+q) = \theta(s) + 2\pi n$ para un entero constante n.

El entero n del resultado anterior puede interpretarse como el número de vueltas que da la función (0,0)+ $\overrightarrow{T}(s)$ alrededor del origen de coordenadas (0,0). Nos referimos a esta cantidad como el número de vueltas de la tangente. Utilizando la interpretación de la curvatura como derivada del ángulo, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.10. Si α es una curva cerrada con un periodo de largo q, y si su tangente tiene número de vueltas n, entonces

$$\int_0^q \theta'(s) ds = \int_0^q \left(\operatorname{sgn} \theta'(s) \right) k(s) ds = 2\pi n.$$

En particular, si la función ángulo no tiene puntos críticos, en particular si la curvatura no se anula, la curvatura total es un múltiplo entero de 2π . Un caso particularmente importante es el de una curva cerrada simple. El Teorema de la curva de Jordan (que no demostraremos en este curso) dice que una curva de este tipo divide al plano en una región interior y una región exterior.

Teorema de Gauss-Bonnet para curvas planas. El número de vueltas de la tangente de una curva cerrade simple es 1, es decir

$$\int_0^q \Big(\operatorname{sgn} \theta'(s)\Big) k(s) ds = 2\pi.$$

En la literatura se utiliza a menudo una noción de curvatura con signo que nos permite evitar el complicado integrando en la identidad precedente. Puede definirse escogiendo de antemano la rotación R, en un ángulo recto, que satisface $R \stackrel{\rightarrow}{T} = \stackrel{\rightarrow}{N}$, y escogiendo el signo de k que preserve la identidad $\stackrel{\rightarrow}{T} = k \stackrel{\rightarrow}{N}$. A continuación demostramos una versión de este resultado válido para curvas simples que acotan una región convexa. En este caso el signo no representa un problema.

Proposición 2.11. Si α es una curva cerrada, con un periodo de largo q, que acota una región convexa, entonces la función ángulo es no decreciente y

$$\int_0^q k(s)ds = 2\pi.$$

Demostración Considerense dos tangentes a la curva en puntos cercanos $P \neq Q$, como muestra la Figura 2.5(A). Estas tangentes no pueden cortar a la curva en ningún otro punto. Asumamos primero que estas tangentes no son paralelas, como en la figura. Entonces deben intersectarse en un punto exterior, por lo que el trozo de la curva que se encuentra entre los puntos de tangencia debe ser interior al triángulo formado por P, Q y el punto de intersección. En otras palabras, la crva entra al triángulo por P y sale por Q, como en la figra. Se concluye que la función ángulo es mayor en el punto de tangencia que se encuentra a la izquierda en la figura, siendo la diferencia igual al ángulo exterior del triángulo. Para terminar la demostración, basta con dibujar un polígono circunscrito a la curva, como se muestra en la Figura 2.5(B) y utilizar el hecho de que los ángulos exteriores de un polígono convexo suman 2π . Falta considerar el caso en que dos tangentes sean paralelas, pero esto sólo puede suceder si la región interior se encuentra entre las dos tangentes, y en tal caso es sencillo agregar tangentes para volver al caso anterior (ver Fig. 2.5(C)).

El proceso de remplazar zonas curvas por esquinas o, más generalmente, cúspides, puede realizarse en ambos sentidos. Dejamos al lector la tarea de utilizar esta idea para demostrar la siguiente versión mixta:

Proposición 2.12. Si α es una curva cerrada, con un periodo de largo q, que es regular salvo por un conjunto finito de cúspides y acota una región convexa, entonces la función ángulo es no decreciente y se tiene

$$\int_0^q k(s)ds + \sum_{i=1}^n \gamma_i = 2\pi,$$

donde $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ denotan los ángulos exteriores de las cúspides.



Figura 2.6: Dos tangentes cercanas de una curva (A) y un pulígono circunscrito a una curva cerrada convexa (B).

Uno podría conjeturar que una demostración similar se aplica a una curva cerrada simple cualquiera. El principal obstáculo es encontrar el análogo apropiado de un polígono circunscrito. Sin embargo podemos utilizar un procedimiento de suma y resta de regiones para probar el Teorema de Gauss-Bonnet para una familia amplia de regiones planas, como se ilustrará en los ejercicios.

Ejercicios

- 1. Pruebe que en toda curva regular cerrada existen al menos dos puntos en los cuales la tangente es horizontal y al menos dos puntos en los cuales la tangente es vertical.
- 2. Probar que una curva regular cerrada tiene largo finito.
- 3. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular cerrada. Demuestre que existe un punto $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que el vector posición $\vec{\gamma}(s_0)$ es perpendicular al vector tangente $\vec{\gamma}'(s_0)$.
- 4. Calcule el número de vueltas de la tangente en cada una de las curvas de la Figura 2.6(A).
- 5. Considere una curva que recorre la estrella de la Figura 2.6(B). Pruebe que el número de vueltas de su tangente es 2. Asuma que la estrella es regular (con todos sus ángulos y lados iguales). Utilice los resultados de esta sección para calcular los ángulos interiores de las puntas.



Figura 2.7: Algunas figuras utilizadas en los ejercicios.

- 6. Pruebe el Teorema de Gauss-Bonnet para la medialuna de la Figura 2.6(C), escribiendo su región interior como la diferencia de dos regiones convexas utilizando la línea punteada.
- 7. Sea $\overrightarrow{\alpha}: [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada convexa de largo L. Probar que existen puntos s_1 y s_2 en [0, L] tales que $k_{\alpha}(s_1) \leq 2\pi/L$ y $k_{\alpha}(s_2) \geq 2\pi/L$.
Capítulo 3

Curvas planas II

En este capítulo veremos cómo la noción de curvatura nos permite conocer diversas propiedades globales de las curvas planas. Recuerdese que, por convención, el parámetro s denota siempre longitud de arco, a menos que se especifique lo contrario. En la primera subsección de este capítulo se requiere cierta familiaridad con la teoría de ecuaciones diferenciales.

Teorema fundamental de la teoría de curvas (caso planar)

Proposición 3.1. Sea α una curva regular de curvatura no nula. La función curvatura $s \mapsto k(s)$ determina la curva α salvo por una isometría del plano, es decir, una transformación obtenida componiendo reflecciones, rotaciones o movimientos rígidos.

Demostración. Sea β una curva cuya función curvatura es $s \mapsto k(s)$. Escribamos $\beta(s) = (x(s), y(s))$. En tal caso se tiene

$$\vec{T}(s) = x'(s) \vec{e}_1 + y'(s) \vec{e}_2, \qquad \vec{N}(s) = \pm \left(-y'(s) \vec{e}_1 + x'(s) \vec{e}_2\right).$$

Asumamos el signo positivo en $\stackrel{\rightarrow}{N}$. En este caso ecribimos lo siguiente:

$$\left(x''(s) \overrightarrow{e}_1 + y''(s) \overrightarrow{e}_2\right) = \overrightarrow{T}'(s) = k(s) \overrightarrow{N}(s) = k(s) \left(-y'(s) \overrightarrow{e}_1 + x'(s) \overrightarrow{e}_2\right).$$

De aquí se tiene en párticular que $x \in y$ satisface el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$x'' = -ky', \qquad y'' = kx'.$$

Este sistema puede escribirse en forma matricial como

$$\left(\begin{array}{c}x''\\y''\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc}0&-k(s)\\k(s)&0\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}x'\\y'\end{array}\right)$$

Se sabe de la teoría general de sistemas de ecuaciones diferenciales que el sistema está totalmente determinado dadas las condiciones iniciales

Nótese que estas condiciones determinan la posición inicial y dirección del vector tangente unitario $\vec{T}(0)$ de la curva en su punto inicial, respectivamente. La condición de que la curva esté parametrizada por longitud de arco implica que el vector $\vec{T}(0) = x'(0) \vec{e}_1 + y'(0) \vec{e}_2$ es un vector unitario. Sea ahora α la curva de curvatura k con condiciones iniciales $\alpha(0) = (0,0)$

y $\vec{\alpha}'(0) = e_1$. Sea β la curva de curvatura k con condiciones iniciales $\alpha(0) = (0, 0)$ y $\vec{\alpha}'(0) = e_1$. Sea β la curva de curvatura k con condiciones iniciales $\beta(0) = (a, b)$ y $\vec{\beta}'(0) = c \vec{e}_1 + d \vec{e}_2$, con $c^2 + d^2 = 1$. Sea R una rotación que satisfaga la ecuación

$$\left(\begin{array}{c}c\\d\end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right).$$

Entonces la curva

$$\gamma(s) = R\alpha(s) + (a \overrightarrow{e}_1 + b \overrightarrow{e}_2)$$

satisface $\gamma(0) = (a,b) = \beta(0)$ y $\vec{\gamma}'(0) = R \vec{\alpha}'(0) = c \vec{e}_1 + d \vec{e}_2 = \vec{\gamma}'(0)$. Por otro lado $\vec{\gamma}'(s) = R \vec{\alpha}'(s)$ es un vector unitario, puesto que $\vec{\alpha}'(s)$ lo es. Se sigue que γ está parametrizada por longitud de arco. Además su curvatura k_{γ} es igual a k ya que, si \vec{N}_{γ} denota su vector normal, se tiene

$$k_{\gamma}(s) \stackrel{\rightarrow}{N}_{\gamma}(s) = \stackrel{\rightarrow}{\beta}''(s) = R \stackrel{\rightarrow}{\alpha}''(s) = k(s)[R \stackrel{\rightarrow}{N}(s)].$$

Por la unicidad ya demostrada, concluimos que

$$\beta(s) = \gamma(s) = R\alpha(s) + (a \overrightarrow{e}_1 + b \overrightarrow{e}_2)$$

para cada valor de s.

Si en lugar de tomar el signo positivo en la ecuación que define \vec{N} , tomamos el signo negativo, se debe remplazar la matrix $\begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}$ por

$$\begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si, ahora, $(x_1(s), y_1(s))$ denota la solución del sistema

$$\left(\begin{array}{c} x_1''\\ y_1''\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1'\\ y_1'\end{array}\right)$$

con las condiciones iniciales

$$(x_1(0), y_1(0)) = (y(0), x(0))$$
 e $(x'_1(0), y'_1(0)) = (y'(0), x'(0)).$

Entonces necesariamente $(x_1(s), y_1(s)) = (y(s), x(s))$ por la unicidad de la solución. Esto nos dá una imagen especular de la curva original.

Nótese que para cualquier función $s \mapsto k(s)$, las ecuaciones x'' = -ky'y y'' = kx' definen funciones $x \in y$, por lo que se obtiene una curva α . Afirmamos que dicha curva está parametrizada por longitud de arco. Más precisamente, si $\overrightarrow{T}(s) = \overrightarrow{\alpha}'(s)$, se tiene

$$(\vec{T}\cdot\vec{T})' = 2\vec{T}'\cdot\vec{T} = 2x''x' + y''y' = 0,$$

dadas las ecuaciones que satisfacen las derivadas. Se sigue que, si $\vec{T}(0)$ es un vector unitario, también lo es $\vec{T}(s)$ para todo valor del parámetro s. Del mismo modo, las ecuaciones implican $\vec{T}'(s) = k(s) \stackrel{\rightarrow}{N}(s)$, donde $\stackrel{\rightarrow}{N}(s)$ es un vectos unitario perpendicular a $\vec{T}(s)$. Se sigue que k es, de hecho, la función curvatura de dicha curva. Este argumento prueba el siguiente resultado:

Proposición 3.2. Toda función continua $s \mapsto k(s)$ es la función curvatura de una curva plana. Si la función k es no-nula, esta curva es única salvo isometrías del plano. La curva así obtenida es infinitamente diferenciable si k lo es.

La última afirmación es una consecuencia de las propiedades de diferenciabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial. Un tema en el que no entraremos en estas notas.

Ejercicios

- 1. Probar que cualquiera de las dos funciones $\overrightarrow{T}(s)$ o $\overrightarrow{N}(s)$ determina la curva salvo una traslación.
- 2. Comprobar que una curva de curvatura k satisface la identidad $u'' = \pm iku'$, donde u = x + iy e i es la unidad imaginaria. Utilice esta fórmula para deducir una fórmula integral para las coordenadas.

- 3. Describa, mediante una parametrización, la curva con curvatura dada por $k(s) = \frac{1}{s}$.
- 4. Dé una parametrización para la curva que aparece en el problema de los escarabajos (sugerencia: puede utilizar el problema anterior, descubra por qué).
- 5. Describa, mediante una parametrización, la curva con curvatura dada por k(s) = s. Puede dejar expresadas las integrales que no pueda calcular.

El teorema de los cuatro vértices

Recordemos que hemos decidido adoptar la convención de que un vértice es un punto donde la curvatura alcanza un máximo o un mínimo local. Dado que los máximos y mínimos locales de una curva se alternan, el número de estos en una curva regular cerrada debe ser par. Para evitar casos patológicos, asumiremos que la curva no contiene arcos rectlíneos ni sectores circulares, en los que la curvatura es constante. Probaremos en este apartado que el número de vértices no puede ser dos, es decir, una curva con una curvartura periódica no puede ser una curva cerrada con un periodo igual al de la curvatura. Nótese, sin embargo, el ejemplo presentado en el Ejercicio 1 más abajo.

A fin de probar este teorema clásico, necesitamos el siguiente resultado previo:

Proposición 3.3. Sean $\alpha, \beta : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ dos curvas parametrizadas por longitud de arco con el mismo largo total L. Supongamos que

- 1. para cada $s \in [0, L]$ la curvatura $k_{\alpha}(s)$ es mayor que la curvatura $k_{\beta}(s)$,
- 2. El trazo $\alpha([0, L])$ seguido del segmento de recta que va de $\alpha(L)$ a $\alpha(0)$ (es decir la cuerda subtendida por α) es el borde de una región convexa, y lo mismo ocurre para β ,

entonces la cuerda subtendida por α es menor que la cuerda subtendida por β (ver Fig. 2.7).

Demostración Sea L el largo de cada curva. Coloquemos, tras una rotación y traslación apropiadas, cada una de las curvas en la posición que



Figura 3.1: Dos curvas del mismo largo que satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.

muestra la Figura 3.2, de modo que las cuerdas subtendidas se encuentren en el eje X. Asumamos que el vector tangente unitario de α está dado por

$$\vec{T}_{\alpha}(s) = \left(\cos\theta_{\alpha}(s)\right) \vec{e}_{1} + \left(\sin\theta_{\alpha}(s)\right) \vec{e}_{2},$$

de modo que, como se vió en el capítulo precedente, se tenga $\theta'_{\alpha}(s) = k_{\alpha}(s)$. Las mismas convenciones se aplican a la curva β . Se sigue que, para todo



Figura 3.2: Las curvas de la Figura 3.1 giradas y trasladadas.

par de valores $s_1 < s_2$ en el intervalo (0, L), se tiene la relación

$$\theta_{\alpha}(s_{1}) - \theta_{\alpha}(s_{2}) = \int_{s_{1}}^{s_{2}} k_{\alpha}(s) \, ds > \int_{s_{1}}^{s_{2}} k_{\beta}(s) \, ds = \theta_{\beta}(s_{1}) - \theta_{\beta}(s_{2}).$$

Observese que el largo de la cuerda asociada a α es

$$x_{\alpha}(L) = x_{\alpha}(L) - x_{\alpha}(0) = \int_0^L x'_{\alpha}(s) \, ds = \int_0^L \cos \theta_{\alpha}(s) \, ds.$$

Sea s_0 el punto de α donde el vector tangente es horizontal, es decir, $\theta_{\alpha}(s_0) = 0$, como muestra la Figura 3.3. Supondremos primero que también



Figura 3.3: El punto de tangente horizontal.

se tiene $\theta_{\beta}(s_0) = 0$. Entonces, para todo $s > s_0$ se tiene $\theta_{\alpha}(s) > \theta_{\beta}(s) > 0$, y por lo tanto $\cos \theta_{\alpha}(s) < \cos \theta_{\beta}(s)$. Del mismo modo, si $s < s_0$ se tiene $\theta_{\alpha}(s) < \theta_{\beta}(s) < 0$, luego $\cos \theta_{\alpha}(s) < \cos \theta_{\beta}(s)$. Se sigue que

$$x_{\alpha}(L) = \int_0^L \cos \theta_{\alpha}(s) \, ds < \int_0^L \cos \theta_{\beta}(s) \, ds = x_{\beta}(L).$$

Esto concluye la demostración en este caso particular. Para el caso general definimos el ángulo desplazado $\theta_{\beta}^*(s) = \theta_{\beta}(s) - \theta_{\beta}(s_0)$. Nótese que θ_{β}^* tiene también derivada k_{β} y se anula en s_0 , por lo que el argumento anterior prueba que

$$x_{\alpha}(L) = \int_0^L \cos \theta_{\alpha}(s) \, ds < \int_0^L \cos \theta_{\beta}^*(s) \, ds.$$

Afirmamos que esta última integral es menor a $x_{\beta}(L)$ lo que concluye la demostración. De hecho la integral

$$x_{\beta}^{*}(L) = \int_{0}^{L} \cos \theta_{\beta}^{*}(s) \, ds$$

es la coordenada x del extremo de la curva β' que se obtiene al rotar β en un ángulo de $\theta_{\beta}(s_0)$ (ver Figura 3.4) y es por lo tanto igual a $x_{\beta}(L) \cos \theta_{\beta}(s_0)$. Nótese resultado sigue, independientemente del signo del ángulo de rotación $\theta_{\beta}(s_0)$.

Teorema de los cuatro vértices. Una curva cerrada dos veces diferenciable tiene al menos cuatro vértices.



Figura 3.4: La curva β girada.

Demostración Supongamos que α tiene sólo dos vértices. En ese caso la curvatura k es una función periódica con sólo un máximo y un mínimo en cada periodo como muestra la Figura 3.5.



Figura 3.5: La curvatura como función de la longitud de arco.

Cortemos el gráfico de la Figura 3.5 de acuerdo a varias rectas horizontales de la forma k = c con c constante. Esto tiene el efecto de dividir el gráfico de la función curvatura, vista como una función definida en el círculo, en dos partes. Utilizando los valores correspondientes del parámetro, también se divide la curva original en dos arcos. Si c está muy cerca del valor máximo de la curvatura, como es el caso del Corte 1 en la Figura 3.6, el arco correspondiente a la parte superior es mucho mas corto que el arco

opuesto. Si c está muy cerca del mínimo, ocurre lo contrario. Se sigue, por el Teorema del valor intermedio, que existe un valor de c para el cual ambos arcos tienen el mismo largo, digamos el Corte 2 en la figura. El resultado precedente implica que la cuerda correspondiente al arco de menor curvatura debe ser mas larga, Pero esto es imposible, pues ambas cuerdas son la misma. La contradicción demuestra lo pedido.



Figura 3.6: Algunos cortes de la curva cerrada, determinados por puntos de igual curvatura.

Ejercicios

- 1. Pruebe que, si p es el largo de la elipse (es decir de un periodo), la función curvatura de esta satisface k(s + p/2) = k(s).
- 2. Con las hipótesis de la Proposición 3.3, suponga que α y β son arcos de círculo y verifique la proposición calculando la longitud de cada cuerda explícitamente como función de la curvatura correspondiente.
- 3. Sea α una curva y sea Γ su círculo de curvatura en s_0 . Suponga que Γ vuelve a cortar el círculo en $\alpha(s_1)$. Suponga que el menor arco de Γ que une ambos puntos de intersección tiene un largo mayor a $s_1 s_0$. Probar que existe un valor $s \in [s_0, s_1]$ en el cual la función curvatura satisface $k(s) < k(s_0)$.

Evolutas e involutas

Consideremos una curva α arbitraria, cuyos vectores tangente y normal se denotan \overrightarrow{T} y \overrightarrow{N} . La curva definida por la ecuación siguiente:

$$E(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \overrightarrow{N}(t)$$

recibe el nombre de evoluta de la curva α y describe el movimiento del centro de curvatura de un punto móvil de la curva. Derivando la fórmula de la evoluta se tiene

$$\vec{E}'(s) = \vec{\alpha}'(s) + \left(\frac{1}{k(s)}\right)' \vec{N}(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{N}'(s) = \left(\frac{1}{k(s)}\right)' \vec{N}(s).$$

Se concluye que la longitud de arco de la evoluta es

$$\sigma(s) = \pm \frac{1}{k(s)} + c$$

y su vector tangente está dado por $\overrightarrow{T}_E(s) = \pm \overrightarrow{N}(s)$. El signo positivo en las identidades precedentes se obtienen cuando la curvatra es decreciente, es decir el parámetro crece en la misma dirección en que aumenta la curvatura. Supongamos esto en lo que sigue. De la ecuación precedente obtenemos, derivando, la identidad $\overrightarrow{T}'_E(s) = -k(s) \overrightarrow{T}(s)$, de la que concluímos que el vector normal a la evoluta es la inversa aditiva $\overrightarrow{N}_E(s) = -\overrightarrow{T}(s)$ de la tangente de la curva original.

Ejemplo 3.4. una elipse con parametrización $\alpha(t) = (b \sin t, a \cos t)$ tiene curvatura dada por

$$k(t) = \frac{ab}{\left((a \sin t)^2 + (b \cos t)^2\right)^{3/2}}.$$

Por otro lado, su tangente unitaria está dada por

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\left((a \sin t)^2 + (b \cos t)^2\right)^{1/2}} \left(b \cos t \ \vec{e}_1 - a \sin t \ \vec{e}_2\right),$$

por lo que la normal está dada por

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\left((a \sin t)^2 + (b \cos t)^2\right)^{1/2}} \left(-a \sin t \vec{e}_1 - b \cos t \vec{e}_1\right).$$

Se sigue que la evoluta viene dada por la parametrización

$$E(t) = (b \operatorname{sen} t, a \cos t) + \frac{(a \operatorname{sen} t)^2 + (b \cos t)^2}{ab} \left(-a \operatorname{sen} t \overrightarrow{e}_1 - b \cos t \overrightarrow{e}_1 \right).$$

Si fijamos la notación para las coordenadas de la evoluta escribiendo E(t) = (u(t), v(t)), entonces podemos calcular que

$$u(t) = b \operatorname{sen} t - \frac{a^2}{b} (\operatorname{sen} t)^3 - b \operatorname{sen} t (\cos t)^2 = \frac{b^2 - a^2}{b} (\operatorname{sen} t)^3$$

y, del mismo modo, que $v(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} (\cos t)^3$. De estas dos expresiones deducimos la fórmula para la evoluta de la elipse

$$\left(\frac{bu}{b^2 - a^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{av}{a^2 - b^2}\right)^{2/3} = 1$$

El gráfico de la evoluta de la elipse es que se muestra en la Figura 2.13.



Figura 3.7: Evoluta de la elipse.

Otra curva auxiliar que se define a partir de una curva dada es la involuta, también llamada evolvente (pero no "envolvente") en la literatura. Una involuta de una curva α parametrizada por longitud de arco es una curva de la forma

$$I(s) = \alpha(s) - s \stackrel{\rightarrow}{T}(s).$$

Decimos *una* involuta, dado que el parámetro de longitud de arco está definido sólo salvo constante, por lo que una curva dada tiene más de una involuta. De hecho existe una familia uniparamétrica de tales curvas definidas mediante $I_c(s) = \alpha(s) - (s+c) \overrightarrow{T}(s)$. La involuta describe el movimiento del extremo de una cuerda de largo fijo que se va adheriendo a la curva. Por ejemplo si la curva describe el borde de un tambor de madera y enrollamos una cuerda a su alrrededor, la trayectoria de cada punto de dicha curva es una involuta (ver Figura 2.14).



Figura 3.8: Un punto de una cuerda que se adhiere a una curva dada describe una involuta.

Derivando la fórmula de la involuta se tiene

$$\vec{I}'(s) = \vec{\alpha}'(s) - \vec{T}(s) - s \vec{T}'(s) = -sk(s) \vec{N}(s).$$

Se concluye que la función longitud de arco de la involuta satisface $s'_I(s) = sk(s)$, y su vector tangente es $\overrightarrow{T}_I(s) = -\overrightarrow{N}(s)$. Derivando esta última identidad se tiene $\overrightarrow{T}'_I(s) = -\overrightarrow{N}'(s) = k(s) \overrightarrow{T}(s)$. Se sigue que la curvatura de la involuta está dada por la fórmula

$$k_I(s) = \frac{d}{ds_I} \stackrel{\rightarrow}{T}_I(s) = \frac{1}{s'_I(s)} \stackrel{\rightarrow}{T}_I(s) = \frac{k(s)}{sk(s)} = \frac{1}{s},$$

y el vector normal es $\stackrel{\rightarrow}{N}_{I}(s) = \stackrel{\rightarrow}{T}(s)$.

Proposición 3.5. Una curva regular es la evoluta de cualquiera de sus involutas y una involuta de su evoluta.

Demostración La evoluta de una involuta *I* está dada por la ecuación

$$E_I(s) = I(s) + \frac{1}{k_I(s)} \stackrel{\rightarrow}{N}_I(s) = \alpha(s) - s \stackrel{\rightarrow}{T}(s) + \frac{1}{1/s} \stackrel{\rightarrow}{T}(s) = \alpha(s).$$

Del mismo modo, una involuta de la evoluta está dada por la ecuación

$$I_E(s) = E(s) - [\sigma(s) + c] \overrightarrow{T}_E(s),$$

donde $\sigma(s)$ es la longitud de arco de la evoluta. Para fijar el signo en las fórmulas para la evoluta, nos restringimos a un intérvalo en el que la curva dada tiene curvatura monótona. La podemos asumir decreciente, parametrizando en sentido contrario de ser necesario. Utilizando la fórmula $\sigma(s) = \frac{1}{k(s)}$, demostrada más arriba, así como $\overrightarrow{T}_E(s) = \overrightarrow{N}(s)$, el resultado sigue tomando c = 0.

Ejercicios

- 1. Probar que todas las involutas de un círculo son congruentes.
- 2. Determine las evolutas de las siguientes curvas:
 - (a) La parábola $y^2 = 2x$.
 - (b) El astroide $x = (\cos t)^3$, $t = (\sin t)^3$.
 - (c) La cicloide $\alpha(t) = (t \operatorname{sen} t, 1 \cos t).$
 - (d) La espiral logaritmica $r = e^{\theta}$.
- 3. Probar que la evoluta de una curva con curvatura no nula no puede contener un segmento.
- 4. Probar que la curvatura de la evoluta de una curva regular cerrada tres veces diferenciable se indefine en al menos cuatro puntos. Concluir que la elipse no es la evoluta de una curva de este tipo.

Arcos espirales

Un arco espiral es por definición una curva de curvatura estrictamente monótona. En la literatura, se pide a menudo signo constante, si uno no utiliza la convención de que la curvatura es siempre positiva. Utilizando esta convención, esto no es necesario, ya que un punto donde la curvatura es 0 no puede tener una vecindad donde la curvatura sea estrictamente monótona. En un arco espiral la longitud de arco de la evoluta está bien definida y es no nula, por lo que la evoluta es una curva regular.

Proposición 3.6. Si Γ_1 y Γ_2 son dos círculos de curvatura de un arco espiral, entonces Γ_1 está al interior de Γ_2 o bién Γ_2 está al interior de Γ_1 (ver Figura 2.15(A)).



Figura 3.9: Dos círculos de curvatura de un arco espiral (A) y el lado interior a uno de estos círculos (B).

Demostración Basta ver que la distancia entre los centros de dichos círculos es inferior a la diferencia entre sus radios. La distancia entre dos centros de curvatura no puede ser mayor que el largo de la evoluta en el intervalo correspondiente, es decir

$$\sigma(s_2) - \sigma(s_1) = \left| \frac{1}{k(s_1)} - \frac{1}{k(s_2)} \right|,$$

donde, como antes, σ denota la longitud de arco de la evoluta. El resultado sigue. $\hfill \Box$

Corollary 3.6.1. Un lado de un arco espiral está siempre contenido en el círculo de curvatura (ver Figura 2.15(B)).

Corollary 3.6.2. Un arco espiral no tiene puntos dobles (ver Figura 2.16(A)).

Demostración Si este fuera el caso habría dos círculos de curvatura del arco espiral con un punto en común. \Box

Corollary 3.6.3. Un arco espiral no tiene tangentes dobles (ver Figura 2.16(A)).

Demostración Si hubiese una tangente doble, esta sería tangente a ambos círculos de curvatura simultaneamente. En particular, sería tangente al círculo mas exterior y contendría un punto interior, pero no puede trazarse una tangente a un círculo desde un punto interior. \Box



Figura 3.10: Un punto doble (A) y una tangente doble (B).

Ejercicios

- 1. Demuestre, en detalle, que la evoluta de un arco espiral es una curva regular.
- 2. Explique por qué, a la luz de los resultados de la sección precedente, la evoluta de una curva no puede tener cúspides salvo en los puntos que corresponden a los vértices de la curva original, como se observa en la evoluta de la elipse.
- 3. Probar que la curva $\phi(t) = (t \cos t, t \sin t)$ es un arco espiral.
- 4. Pruebe que la curva de ecuación polar $r=e^{\theta}$ (o espiral logarítmica) es un arco espiral.
- 5. Sea α la curva plana de ecuación intrínseca k(s) = s, definida para $s \ge 0$. Demuestre que α es una curva acotada de largo infinito que no se cruza a sí misma.
- 6. Probar que el vértice de una parábola está contenida en cada uno de sus círculos de curvatura.
- 7. El vector posición $\vec{\alpha}$ de una curva $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ satisface $\vec{\alpha}$ $(s) \cdot \vec{T}$ (s) = -1/2 para cada valor del parametro s (que es la longitud de arco). Encuentre una fórmula para la curvatura como función de s y determine si es o no un arco espiral.
- 8. sea Γ la recta tangente a un punto P de un arco espiral A. Probar que todos los puntos de A en los cuales la curvatura es mayor que en P se encuentran al mismo lado de Γ .

9. sea α un arco espiral. Probar que el vector $\vec{v}(s)$ que satisface $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \vec{v}(s)$ gira siempre en el mismo sentido a medida que la curvatura disminuye, es decir

$$\vec{v}(s) = r(s) \Big(\cos \rho(s) \vec{e}_1 + \sin \rho(s) \vec{e}_2 \Big)$$

con ρ monótona.

Capítulo 4

Areas y perímetros

El principal objetivo de este capítulo es demostrar un resultado clásico de la teoría de curvas que relaciona el largo de una curva con el área de la región encerrada. Para ello repasaremos algunos conceptos previos que suelen ser parte del temario de un cúrso elemental de cálculo multivariado. Lo expondremos, sin embargo, en un lenguaje más acorde al que se utilizará en los capítulos posteriores.

Integrales de línea y homotopías diferenciables

Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y sea $\alpha : [a, b] \to D$ una curva. Sean $F, G : D \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. La integral de línea $\int_{\alpha} F \, dx + G \, dy$ se define mediante la fórmula

$$\int_{\alpha} F \, dx + G \, dy = \int_{a}^{b} \left[F\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + G\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] \, dt,$$

donde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Nótese que, si se define la función vectorial $\vec{E}: D \to \mathbb{R}^2$ mediante la ecuación $\vec{E}(x, y) = F(x, y) \vec{e}_1 + G(x, y) \vec{e}_2$, la integral del lado derecho puede también escribirse, en términos del producto punto escalar, como

$$\int_{a}^{b} \overrightarrow{E} \left(\overrightarrow{\alpha} \left(t \right) \right) \cdot \overrightarrow{\alpha}'(t) \, dt,$$

por lo que a menudo se escribe $\int_{\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{z}$. La notación $d\vec{z} = (dx) \vec{e}_1 + (dy) \vec{e}_2$, puede considerarse sólo eso, parte de la notación de la integral, aunque tendremos ocasión de hablar del significado preciso de los diferenciales más adelante. Por ahora nos referimos a la integral de línea de arriba como la integral de línea del campo escalar \vec{E} a lo largo de la curva α .



Figura 4.1: Una deformación de una curva en otra con un estado intermedio.

Una deformación, u homotopía diferenciable, de una curva α en una curva β es una función continua $H : [a, b] \times [c, d] \rightarrow D$ que es derivable al interior del rectángulo, cuyas derivadas parciales se extienden continuamente al borde del mismo, y que satisface las condiciones de borde

$$H(\tau, 0) = \alpha(\tau) \text{ y } H(\tau, 1) = \beta(\tau).$$

Para cada punto $t \in [c, d]$, la curva γ_t definida por $\gamma_t(\tau) = H(\tau, t)$ es una curva diferenciable, que puede pensarse como un estado intermedio de la deformación, como en la Figura 3.1. La función H tiene dos coordenadas, que denotaremos por $x \in y$, cada una de las cuales puede interpretarse como una función de dos variables $x = x(\tau, t) \in y = y(\tau, t)$. La homotopía se dice de extremos fijos cuando las expresiones $H(0,t) \neq H(1,t)$ son constantes como funciones de t. Esto se interpreta en términos de las curvas intermedias, diciendo que el punto inicial y final de la curva γ_t es independiente de t. Consideremos la integral de linea de un campo escalar fijo con respecto a una de estas curvas intermedias como una función del parámetro t de la deformación. En este caso, las derivadas que aparecen en la definición de integral de línea deben interpretarse como derivadas parciales, en el sentido siguiente:

$$K(t) = \int_{\gamma_t} F \, dx + G \, dy = \int_a^b \left[F \frac{\partial x}{\partial \tau} + G \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] \, d\tau.$$

La existencia de derivadas parciales continuas de cada órden en un conjunto compacto (el cuadrado) nos permite derivar bajo el signo integral, de donde se obtiene, utilizando la regla de la cadena, la identidad siguiente:

$$K'(t) = \int_{a}^{b} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] d\tau$$

$$+ \int_{a}^{b} \left[F \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial t} + G \frac{\partial^2 y}{\partial \tau \partial t} \right] d\tau$$

Integrando por partes la última expresión, se tiene

$$+ \int_{a}^{b} \left[F \frac{\partial^{2} x}{\partial \tau \partial t} + G \frac{\partial^{2} y}{\partial \tau \partial t} \right] d\tau = \left[F \frac{\partial x}{\partial t} + G \frac{\partial y}{\partial t} \right] \Big|_{\tau=a}^{\tau=b}$$
$$- \int_{a}^{b} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \frac{\partial y}{\partial t} \right] d\tau$$

Cancelando y agrupando términos se tiene la fórmula

$$K'(t) = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) d\tau + \left[F\frac{\partial x}{\partial t} + G\frac{\partial y}{\partial t}\right]\Big|_{\tau=a}^{\tau=b}.$$

Se sigue ahora del teorema fundamental del cálculo que

$$\begin{split} K(d) - K(c) &= \int_{c}^{d} K'(t) \, dt = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \, d\tau \, dt \\ &+ \int_{c}^{d} \left[F \frac{\partial x}{\partial t} + G \frac{\partial y}{\partial t} \right] \Big|_{\tau=a}^{\tau=b} dt. \end{split}$$

El último término se anula en el caso de una homotopía de extremos fijos, pues los valores s = a y s = b corresponden a los extremos de las curvas intermedias y las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial t}$ y $\frac{\partial y}{\partial t}$ son nulas allí pues estos extremos son constantes. Obtenemos por lo tanto la fórmula

$$K(d) - K(c) = \int_{c}^{d} K'(t) dt = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) d\tau dt$$

Una primera aplicación de esta fórmula es el resultado siguiente:

Proposición 4.1. Bajo las hipótesis anteriores, si $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$ identicamente en la región D, la integral de línea sobre dos caminos que pueden deformarse uno en el otro, mediante una homotopía diferenciable de extremos fijos, coinciden.

La Figura 3.2 muestra una región D con un agujero en la zona tarjada. aquí la curva α_1 puede deformarse en α_2 , pero no en α_3 . Podemos concluir del resultado precedente que las integrales de linea sobre las dos primeras lineas coinciden, pero no la tercera. Por cierto, para demostrar la existencia de una deformación entre dos curvas es suficiente con dar una formula



Figura 4.2: Tres curvas en una región con un agujero.

explícita, lo que a menudo es engorroso, pero no dificil. Por ejemplo, si $\alpha_1(\tau) = \alpha_2(\tau) + \vec{v}(\tau)$ para cierta función \vec{v} a valores vectoriales, y si el segmento que une los puntos $\alpha_1(\tau)$ y $\alpha_2(\tau)$ está contenido en *D* para cada valor del parámetro τ , entonces puede definirse una homotopía mediante la fórmula

$$H(\tau, t) = \alpha_1(\tau) + t \vec{v}(\tau),$$

la que satisface $H(\tau, 0) = \alpha_1(\tau)$ y $H(\tau, 1) = \alpha_2(\tau)$. A ojo vemos que esto ocurre con las curvas α_1 y α_2 de la Figura 3.2, por ejemplo, si el parámetro τ es proporcional a la longitud de arco. Nótese que la integral de línea es independiente de la parametrización, por lo que puede escogerse una parametrización de esas características para realizar el cálculo. En casos mas generales, es a menudo posible dibujar una sucesión de curvas, cada una de las cuales puede probarse que es una deformación de la precedente por el método ya descrito, y esto basta para probar que las integrales de línea coinciden. Más dificil es, a menudo, comprobar que dos curvas no pueden deformarse una en la otra. Para esto, una alternativa es encontrar un campo vectorial explícito para el cual las integrales sean diferentes. Un ejemplo de tal campo es el gradiente de la función ángulo

$$\overrightarrow{v}(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \overrightarrow{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \overrightarrow{e}_2,$$

el cual se indefine en el origen de coordenadas y sirve para distingir curvas que pasan sobre el origen de curvas que pasan bajo el. Algunos ejemplos de este tipo se encuentran en los ejercicios.



Figura 4.3: Una región acotada por dos curvas homotópicas.

Antes de probar el siguiente resultado necesitamos recordar el Teorema de Cambio de Variables. Recuerde que un difeomorfismo es una biyección diferenciable con inversa diferenciable, o, equivalentemente, una función continua entre dos dominios cerrados que es derivable, con matriz Jacobiana invertible al interior del dominio y con una inversa global bien definida.

Proposición 4.2. Si $H: D \to D'$ es un difeomorfismo, y si $K: D' \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces se tiene la identidad

$$\int \int_{D'} K = \int \int_{D} (K \circ H) J(H),$$

donde J(H) es el determinante de la matriz jacobiana de H.

Una consecuencia inmediata del resultado precedente y de la fórmula que ya hemos demostrado es la siguiente forma del Teorema de Green:

Proposición 4.3. Bajo las hipótesis anteriores, si la deformación H puede escogerse de modo que se restrinja a un difeomorfismo del interior del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ con su imagen, entonces

$$K(d) - K(c) = \int_{H(R)} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx dy.$$

Nótese que K(d) - K(c) puede interpretarse como la integral de línea del campo vectorial a lo lárgo del perímetro de la región encerrada, como se muestra en los ejercicios (ver Figura 3.3).

Ejercicios

- 1. Probar que la integral de línea es independiente de la parametrización.
- 2. Probar que si la curva opuesta $\[-\alpha : [-b, -a] \to \mathbb{R}^2\]$ a una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ se define por $\[-\alpha(\tau) = \alpha(-\tau)\]$, entonces la integral de línea satisface la propiedad $\int_{-\alpha} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{z} = -\int_{\alpha} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{z}$.
- 3. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ y $\beta : [b, c] \to \mathbb{R}^2$ son curvas que satisfacen $\alpha(b) = \beta(b)$, definimos la curva yuxtapuesta $\gamma = \alpha * \beta$ por

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \alpha(\tau) & \text{si } \tau \le b \\ \beta(\tau) & \text{si } \tau \ge b \end{cases}$$

Probar que la integral de línea tiene la propiedad aditiva $\int_{\alpha*\beta} \vec{E} \cdot d\vec{z} = \int_{\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{z} + \int_{\beta} \vec{E} \cdot d\vec{z}$.

4. Utilice los resultados anteriores y la Proposición 3.3 para deducir el Teorema de Green:

$$\int_{\gamma} F \, dx + G \, dy = \int_{A} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) \, dx \, dy$$

donde A es una región acotada por una curva γ que puede escribirse como yuxtaposición $\gamma = \alpha * \beta$, bajo la hipótesis de que existe una deformación H de α a $^{-}\beta$ que se restringe a un difeomorfismo del interior de un rectangulo con el interior de A.

- 5. Sean $f, g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas que son diferenciables al interior del intervalo cerrado J. Asumamos también que $f \ge g$ coinciden en los extremos de J, mientras que f < g al interior de J. Probar el teorema de Green para la región acotada por los gráficos de $f \ge g$.
- 6. En el ejercicio precedente, eliminar la condición de que f y g coincidan en los extremos del intervalo mostrando que el término

$$\int_{c}^{d} \left[F \frac{\partial x}{\partial t} + G \frac{\partial y}{\partial t} \right] \Big|_{\tau=a}^{\tau=b} dt,$$

coincide con la suma de la integral de línea de los tramos verticales del contorno.



Figura 4.4: Las dos curvas del ejercicio 9.

7. Demuestre el Teorema de Green para la región definida por las desigualdades

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4$$
, $0 \le \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \le \frac{3\pi}{2}$,

de dos maneras distintas:

- (a) Subdividiendo la región anterior en trozos a los cuales se pueda aplicar el ejercicio precedente.
- (b) Directamente, utilizando un difeomorfismo de la figura en un rectángulo. Se sugiere usar coordenadas polares.

Cuando x = 0, considere que Arctan $\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ si y > 0 y Arctan $\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{3\pi}{2}$ si y < 0.

- 8. Demuestre, por cualquier medio, el Teorema de Green para un triángulo.
- 9. Demuestre el Teorema de Green para una región acotada por dos rectas y dos curvas, con la propiedad de que las curvas se parametrizan por el mismo intervalo, de modo que las rectas que unen puntos correspondientes no se cortan, como en la Figura 4.4.

La desigualdad isoperimétrica

En esta sección abordaremos finalmente la demostración de un teorema clásico sobre curvas cerradas, la desiguadad isoperimétrica. Para ello necesitamos recordar algunos hechos sobre areas y perímetros. Asumiremos como conocido el hecho de que una curva cerrada que no se cruza a sí misma (simple) divide el plano en dos regiones, una interior D y una exterior U.

Más aún. al recorrer la curva, se tiene siempre el interior a un lado y el exterior al otro. Decimos que la curva está recorrida en sentido positivo, o levógiro, si el interior está siempre a la izquierda del obervador que recorre la curva, como en la Figura 4.5(A). Este es el sentido contrario al que posee el movimiento de los punteros de un reloj.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple. Sea $R_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de rotación levógira en $\frac{\pi}{2}$ radianes. Una manera precisa de decir que la curva está recorrida en sentido positivo es decir que el vector $\overrightarrow{M}(s) = R_{\pi} \overrightarrow{T}(s)$ apunta a la región interior D. En otras palabras $\alpha(s) + \epsilon \overrightarrow{M}(s)$ es un punto de la región D para valores pequeños de ϵ .

Siendo \vec{M} un vector ortogonal al vector tangente, se tiene claramente $\vec{M} = \pm \vec{N}$. Sin embargo, podemos decir más. La expansión de Taylor nos dice que la tangente, en primera aproximación, está dada por

$$\vec{T}(s+\epsilon) = \vec{T}(s) + \epsilon k(s) \vec{N}(s) + O(\epsilon^2).$$

Al mismo tiempo, en términos de la función ángulo θ , podemos expresar la tangente como sigue:

$$\vec{T}(s+\epsilon) = R\Big(\theta(s+\epsilon) - \theta(s)\Big) \vec{T}(s), \qquad R(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta \\ \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo muestra que $R'(\eta) = R_{\pi}R(\eta)$, de donde

$$\vec{T}(s+\epsilon) = \left[R(0) + \left[\theta(s+\epsilon) - \theta(s)\right]R_{\pi}R\left(\theta(s+\epsilon) - \theta(s)\right)\right]\vec{T}(s) + O\left[\left(\theta(s+\epsilon) - \theta(s)\right)^2\right] = \left[R(0) + \epsilon\theta'(s)R_{\pi}R(0)\right]\vec{T}(s) + O(\epsilon^2) = \vec{T}(s) + \epsilon\theta'(s)\vec{M}(s).$$

Concluímos que $k \stackrel{\rightarrow}{N} = \theta' \stackrel{\rightarrow}{M}$, es decir que $\stackrel{\rightarrow}{M} = -\stackrel{\rightarrow}{N}$ precisamente en aquellos puntos en los cuales la función ángulo $\theta(s)$ es decreciente.

Consideremos ahora la curva α_r definida por $\alpha_r(s) = \alpha(s) - r \stackrel{\rightarrow}{M}(s)$, es decir la curva descrita por un punto que se mantiene a distancia r por fuera de la curva original, como en la Figura 4.5(A).

Nótese que, derivando la definición de la curva se obtiene la relación

$$\vec{\alpha}_r'(s) = \vec{\alpha}'(s) - r \vec{M}'(s) = \left[1 + \theta'(s)\right] \vec{T}(s).$$



Figura 4.5: Una curva a distancia r de una curva dada (A) y dos rayos perpendiculares a las tangentes que no se cortan (B).

Se sigue que el largo $l(\alpha_r)$ de la curva α_r está dada por

$$l(\alpha_r) = \int_a^b \left[1 + \theta'(s) \right] \, ds = (b-a) + r \int_a^b \theta'(s) \, ds = l(\alpha) + 2\pi r.$$

Este argumento demuestra el siguiente resultado:

Proposición 4.4. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva simple parametrizada por longitud de arco. Entonces la curva α_r definida más arriba satisface la fórmula $l(\alpha_r) = l(\alpha) + 2\pi r$.

Supongamos ahora que la región D es convexa, es decir que el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos está contenido en D. Recuérdese que la Proposición 2.3 nos dice que, en un punto de curvatura no nula, la curva no cruza su tangente, es decir todos los puntos de esta que son suficientemente cercanos al punto de tangencia se encuentran a un mismo lado de la tangente. De hecho este es tambien el lado al que se encuentra el vector normal, como se aprecia en la Figura 2.4(A). La hipótesis de convexidad nos dice que, en este caso, toda la curva debe encontrarse a ese mismo lado. Concluimos que la normal apunta hacia el interior, en particular se tiene $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{N}$ y el ángulo θ es no decreciente.

De lo anterior, es fácil ver que los rayos de la forma $\Gamma_s = \alpha(s) - \mathbb{R}_{\geq 0} \stackrel{\rightarrow}{M} (s)$ no se cortan, como en la Figura 4.5(B), incluso en los puntos de curvatura

0, o en el caso en que la curva contenga un segmento de recta como la que se muestra en la Figura 4.5(A). Concluímos que la curva α_r no puede tener ningún punto doble, es decir es una curva simple y encierra una región $D^{[r]}$.

Si α está dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, con nuestras convenciones, la tangente y la normal interior están dadas por

$$\vec{T}(s) = x'(s) \vec{e}_1 + y'(s) \vec{e}_2, \qquad \vec{M}(s) = -y'(s) \vec{e}_1 + x'(s) \vec{e}_2.$$

En particular, la última fórmula corresponde al vector normal en el caso convexo. El área encerrada por α es, según el Teorema de Green:

$$A(\alpha) = \iint_{D} dx \, dy = \int_{\alpha} x \, dy = -\int_{\alpha} y \, dx.$$

Utilizando las fórmulas para la tangente y la normal, más la definición de la curva $\alpha_r = (x_r, y_r)$, el área encerrada por esta última está, en el caso convexo, dada por:

$$\int_{a}^{b} x_{r} y_{r}' \, ds = \int_{a}^{b} (x + ry')(y - rx')' \, ds =$$
$$\int_{\alpha} x \, dy + r \int_{a}^{b} (y')^{2} \, ds - r \int_{a}^{b} xx'' \, ds - r^{2} \int_{a}^{b} x'' y' \, ds.$$

La tercera integral del lado izquierdo se integra por partes para obtener

$$-r\int_a^b xx''\,ds = r\int_a^b (x')^2\,ds.$$

De este modo tenemos, utilizando el hecho de que la tangente es un vector unitario, que

$$A(\alpha_r) = A(\alpha) + r \int_a^b [(y')^2 + (x')^2] \, ds - r^2 \int_a^b x'' y' \, ds$$

= $A(\alpha) + r \int_a^b ds - r^2 \int_a^b x'' y' \, ds$
= $A(\alpha) + rl(\alpha) - r^2 \int_a^b x'' y' \, ds.$

Utilizando el hecho de que x'' es la primera coordenada del vector normal, y por lo tanto es igual a -ky', se tiene

$$\int_{a}^{b} x'' y' \, ds = -\int_{a}^{b} k(s) y'(s)^2 \, ds.$$

Por otro lado, integrando por partes, se tiene

$$\int_{a}^{b} x''y' \, ds = -\int_{a}^{b} x'y'' \, ds = -\int_{a}^{b} k(s)x'(s)^2 \, ds.$$

Promediando ambas identidades, se tiene

$$\int_{a}^{b} x'' y' \, ds = -\frac{1}{2} \int_{a}^{b} k(s) [x'(s)^{2} + y'(s)^{2}] \, ds = -\frac{1}{2} \int_{a}^{b} k(s) \, ds = -\pi.$$

Se concluye el siguiente resultado:

Proposición 4.5. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco que encierra una región convexa D. Entonces la curva α_r definida más arriba satisface la fórmula $A(\alpha_r) = A(\alpha) + rl(\alpha) + \pi r^2$.



Figura 4.6: Limando esquinas y sacando la vuelta.

Puede interpretarse $l(\alpha_r)$ y $A(\alpha_r)$ como el área A(D,r) y el perímetro P(D,r) de la región $D^{[r]}$ formadas por los puntos a distancia no mayor a r de la región D. Las identidades que hemos demostrado para estas cantidades continúan siendo ciertas para curvas convexas con esquinas, ya que estas pueden aproximarse por curvas regulares, por ejemplo, en el caso de un polígono, la curva α_r tiene una discontinuidad en la esquina que puede subsanarse agregando un sector circular como en la Figura 4.6(A), y esta curva α_r converge uniformemente a α cuando r tiende a 0. Incluso, puede probarse que esto puede hacerse de modo que los largos de las curvas que aproximan converjan al largo de la curva límite. Esto último no es inmediato como se muestra en los ejercicios.

Cuando las curva α no es convexa, como en la Figura 4.6(B), la curva α_r puede autointersectarse, por lo que, eliminando estas vueltas, obtenemos

que las áreas y perímetros de las regiones formadas por los puntos a distancia no mayor a r de la región D satisfacen, en este caso más general, las desigualdades siguientes:

$$P(D,r) \le P(D) + 2\pi r, \qquad A(D,r) \le A(D) + rP(D) + \pi r^2.$$

Ahora estamos en posición de probar la desigualdad isoperimétrica:

Proposición 4.6. Una curva cerrada de largo P encierra un área no mayor a $P^2/(4\pi)$ con igualdad si y sólo si la curva es un círculo.

Demostración Observemos primero que la demostración se reduce fácilmente al caso en que la región encerrada D es convexa, puesto que si no, podemos remplazar D fácilmente por una región de menor perímetro y mayor area, remplazando el arco de la curva que une los extremos de un segmento exterior a la curva por dicho segmento como muestra la Figura 4.7(A). El área de la nueva figura incluye también el área de la región D', mientras que el perímetro disminuye por ser la recta la distancia más corta entre dos puntos, de modo que el segmento que forma parte del perímetro de la región $D \cup D'$ es mas corto que el borde común entre D y D'. Inscribamos



Figura 4.7: Reducción al caso convexo (A) y el círculo inscrito usado en la demostración de la desigualdad isoperimétrica.

un círculo Γ de radio maximal r al interior de D como en la Figura 4.7(B), y trazamos una cuerda n que pasa por el centro de dicho círculo. Esta cuerda corta el borde de D en dos arcos c_1 y c_2 . En particular, el perímetro de Des $P(D) = l(c_1) + l(c_2)$. Como Γ tiene radio maximal, ningún punto de la región D puede estar a una distancia mayor a r del borde de D.

Trazamos un círculo Γ' con el mismo centro que Γ y un radio R > rsuficientemente grande, de modo que la región D esté totalmente contenida en su interior. Prolongamos la cuerda n por p y q de modo que p * n * q sea un diámetro de Γ' . Este diámetro divide a Γ' en dos arcos, S_1 y S_2 . Sean D_1 y D_2 las dos regiones conexas que quedan al retirar del disco B, interior al círculo Γ' , la región D y los segmentos p y q (ver Figura 3.7). Nótese que



Figura 4.8: Un círculo muy grande alrededor de la región D.

el área del círculo mayor es

$$\pi R^2 = A(D) + A(D_1) + A(D_2).$$

Sea $\rho > r$ un real. Para cada región (o curva) F, denotamos por $F^{[\rho]}$ la región formada por aquellos puntos a distancia no mayor a ρ de F. Nótese que $D \subseteq D_1^{[\rho]} \cup D_2^{[\rho]}$, dado que ningún punto de D puede estar a una distancia mayor a r del borde. Obsérvese tambien que:

- 1. $A(B^{[\rho]}) = \pi (R + \rho)^2$.
- 2. $A(p^{[\rho]}) = \pi \rho^2 + 2\rho l(p).$

3.
$$A(q^{[\rho]}) = \pi \rho^2 + 2\rho l(q).$$

Aquí los segmentos $p \ge q$ se consideran como regiones de área 0 cuyo borde se obtiene recorriendo dos veces el segmento. Esto puede considerarse un caso límite de nuestros resultados anteriores y se deja como ejercicio al lector convencerse de que nuestras fórmulas generales son válidas en este caso. Véase la Figura 3.8. Aplicando las observaciones anteriores a las regiones $D_1 \ge D_2$, se tienen las desigualdades

$$A\left(D_{1}^{[\rho]}\right) \le A(D_{1}) + \rho\left(l(c_{1}) + l(p) + l(q) + \pi R\right) + \pi \rho^{2}$$

у

$$A\left(D_{2}^{[\rho]}\right) \le A(D_{2}) + \rho\left(l(c_{2}) + l(p) + l(q) + \pi R\right) + \pi \rho^{2}.$$

Por otro lado, si $\rho \in \left(r, \frac{l(n)}{2}\right)$, la unión de las regiones $D_1^{[\rho]}$ y $D_2^{[\rho]}$ contiene a la totalidad de la región $B^{[\rho]}$, mientras que las regiones $p^{[\rho]}$ y $q^{[\rho]}$ están contenidas simultáneamente en ambas regiones y no se intersectan (pues $2\rho \leq l(n)$). Se concluye que

$$A\left(B^{[\rho]}\right) + A\left(p^{[\rho]}\right) + A\left(q^{[\rho]}\right) \le A\left(D_1^{[\rho]}\right) + A\left(D_2^{[\rho]}\right).$$

Remplazando los valores ya calculados para cada una de las regiones del lado izquierdo y las cotas para las regiones de la derecha, se tiene:

$$\pi(R+\rho)^2 + 2\pi\rho^2 + 2\rho\left(l(p) + l(q)\right) \le A(D_1) + A(D_2) + \rho\left(l(c_1) + l(c_2)\right) + 2\rho\left(l(p) + l(q) + \pi R\right) + 2\pi\rho^2$$

Arreglando y cancelando se tiene

$$\left(\pi R^2 - A(D_1) - A(D_2)\right) \le \rho P(D) - \pi \rho^2.$$

Nótese que la diferencia de la izquierda es el área de D. Se concluye que $A(D) \le \rho P(D) - \pi \rho^2$ y por lo tanto

$$P(D)^{2} - 4\pi A(D) \ge P(D)^{2} - 4\pi \left(\rho P(D) - \pi \rho^{2}\right) = \left(P(D) - 2\pi \rho\right)^{2}.$$

Esto termina la demostración de la desigualdad, porque el cuadrado en el lado derecho es no negativo. Nótese que si ρ varía en un intervalo de largo positivo, este cuadrado no puede ser nulo para cada ρ . Se concluye que la igualdad sólo es posible si l(n) = 2r, lo que significa que D es un círculo. \Box



Figura 4.9: Las curvas a distancia ρ de $B,\,p$ y q.

Ejercicios

1. Utilizar la fórmula

$$\operatorname{Area}(D) = \int_{\alpha} x \, dy$$

para calcular el area encerrada por la curva $r = \cos^2 \theta$.

- 2. Probar que entre todos los polígonos de perímetro P no existe uno con área maximal.
- 3. probar que la existencia de puntos aislados de curvatura 0 en los que la curva cruza la tangente contradicen la hipótesis de convexidad.
- 4. Probar que si la región D es convexa y su curva borde α contiene un segmento de recta, entonces D se encuentra conpletamente a un lado de la recta que prolonga dicho segmento.
- 5. Para toda curva cerrada α que acota una región D, defina el cociente $C(\alpha) = A(D)/l(\alpha)^2$. Probar que si D es convexa, entonces $C(\alpha_r)$ es una función creciente de r y $\lim_{r\to\infty} C(\alpha_r) = \frac{1}{4\pi}$.
- 6. Se
a α una curva cerrada convexa que encierra un área A. Probar que en algún punto
 t la curvatura k(t) satisface

$$k(t) \le \sqrt{\frac{\pi}{A}}.$$

Pruebe, mediante un ejemplo, que dicho valor es optimal.

7. Sea α una curva regular y sea $\{\alpha_n\}_n$ una sucesión de curvas (definidas en el mismo intervalo) que converge uniformemente a α . Demuestre que

$$\lim_{r \to \infty} l(\alpha_n) \ge l(\alpha).$$

Dé un ejemplo donde la igualdad no se cumple.

Capítulo 5

Curvas en el espacio

En este capítulo trabajaremos con curvas en el espacio, es decir, curvas del tipo $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. En este contexto, es aún posible definir un vector normal y una curvatura mediante la fórmula $\vec{T}'(s) = k(s) \vec{N}(s)$. El par $\{\vec{T}, \vec{N}\}$ ya no forma, sin embargo una base del espacio ambiente. La manera tradicional de remediar esto es introduciendo un tercer vector utilizando el producto cruz vectorial, el que se estudia en la primera sección de ese capítulo. Una consecuencia de este hecho es la imposibilidad de determinar el vector normal utilizando sólo la condición de ortogonalidad con el vector tangente. Se necesitan, por lo tanto, nuevas versiones de las ecuaciones fundamentales, las que involucran una base canónica de 3 vectores. Esta teoría se desarrolla en las secciones subsecuentes para su uso en diversas aplicaciones, así como para establecer una generalización del Teorema Fundamental.

El producto cruz vectorial

Este se define en la base canónica mediante las ecuaciones

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2,$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3,$$

у

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0,$$

para luego extenderlo por bi-linealidad a todo el espacio tridimensional. Se deduce fácilmente que el producto cruz tiene la propiedad $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

para cada par de vectores $\vec{x} \in \vec{y}$. De hecho, esto se deduce de las identidades precedentes, ya que cada lado de esta ecuación es una función bilineal y ambas coinciden en la base, por lo que son identicas. De aquí se deduce fácilmente que $\vec{x} \times \vec{x} = 0$. El producto cruz no es, sin embargo, asociativo, ya que se tiene

$$\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2,$$

mientras que

$$(\overrightarrow{e}_1 \times \overrightarrow{e}_1) \times \overrightarrow{e}_2 = 0$$

por la propiedad de ser alternante. El producto cruz también suele calcularse utilizando la mecánica del cálculo de determinantes, como sigue:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) \vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3) \vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{e}_3,$$

donde $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ e $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$. Dejamos al lector la comprobación de que este algoritmo coincide con la definición precedente, así como la demostración de algunas de las propiedades mas conocidas de este producto, las que se detallan en los ejercicios.

Ejercicios

1. Demuestre que, para todo par de vectores (\vec{x}, \vec{y}) que subtienden un ángulo θ , se satisface la identidad

$$|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}| = |\overrightarrow{x}| |\overrightarrow{y}| |\operatorname{sen}(\theta)|.$$

Concluya que $|\vec{x} \times \vec{y}|$ es el área del paralelógramo cuyos lados son los vectores \vec{x} y \vec{y} (ver Figura 5,1).

2. Demuestre que, para todo trío de vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, se tiene

$$\vec{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \right) = \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \right) \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right) \overrightarrow{c}$$

3. Demuestre que, para todo trío de vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, se satisface la identidad de Jacobi

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0.$$



Figura 5.1: Interpretación geométrica del producto cruz vectorial. En la figura $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$.

4. Demuestre que, para todo trío de vectores $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, se satisface la identidad del producto escalar triple

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Demuestre que el producto escalar triple del ejercicio anterior es igual al volumen del paralelógramo de lados \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} .

El sistema de referencia móvil

Como una base en \mathbb{R} está formada por 3 vectores, se necesita agregar un tercer vector, a la tangente y la normal, para formar una base. Este se define como el producto cruz vectorial $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{T}\times\overrightarrow{N}$, y se lo denomina el vector binormal de la curva (ver Figura 5.2). El *plano normal* a la curva es el plano normal a la tangente y tiene como base al conjunto $\{\overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\}$. El *plano osculador* a la curva es el plano normal al vector binormal y tiene como base al conjunto $\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\}$. Puede interpretarse como el plano que mejor se ajusta a la curva. El *plano rectificante* a la curva es el plano normal al vector normal al vector normal principal y tiene como base al conjunto $\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{B}\}$. Puede interpretarse como el plano normal al vector normal principal y tiene como base al conjunto $\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{B}\}$. Puede interpretarse como el plano de un alfarero da forma a la vasija).

El trío $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 y recibe el nombre de sistema de referencia móvil de la curva. Cualquier vector \vec{v} en el espacio puede expresarse en términos de este sistema de referencia mediante la fórmula

$$\vec{v} = \left(\vec{v} \cdot \vec{T}\right) \vec{T} + \left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right) \vec{N} + \left(\vec{v} \cdot \vec{B}\right) \vec{B}.$$



Figura 5.2: El sistema de referencia móvil.

En particular esto puede hacerse con las derivadas $\vec{T}', \vec{N}', y \vec{B}'$. Ya sabemos que $\vec{T} = k \vec{N}$ por definición. La relación $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ implica

$$\vec{B}' = \vec{T}' \times \vec{N} + \vec{T} \times \vec{N}' = 0 + \vec{T} \times \vec{N}' = \vec{T} \times \vec{N}',$$

de donde \overrightarrow{B}' es perpendicular a \overrightarrow{T} . Como \overrightarrow{B} es un vector unitario, también es perpendicular a \overrightarrow{B}' . Se sigue así que $\overrightarrow{B}'(s) = \tau(s) \stackrel{\rightarrow}{N}(s)$ para alguna función escalar $s \mapsto \tau(s)$ que recibe el nombre de torsión de la curva. Esta función no es necesariamente positiva. Por otro lado, la relación $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ implica $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{N} = -\overrightarrow{T}' \cdot \overrightarrow{N} = -k$ y la relación $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ implica $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{N}' = -\overrightarrow{B}' \cdot \overrightarrow{N} = -\tau$. Concluimos que

$$\vec{T}' = k \vec{N}, \qquad \vec{N}' = -k \vec{T} - \tau \vec{B}, \qquad \vec{B}' = \tau \vec{B},$$

y estas relaciones reciben el nombre de fórmulas de Frênet.

Ejemplo 5.1. Considérese la la hélice circular de ecuación

$$\alpha(t) = \left(\cos t, \sin t, t\right)$$

(ver Figura 4.1), cuya derivada es el vector

$$\vec{\alpha}'(t) = -(\operatorname{sen} t) \vec{e}_1 + (\cos t) \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Este vector tiene largo $\sqrt{2}$, por lo que la longitud de arco de α está dada por $s(t) = \int_0^t \sqrt{2} = t\sqrt{2}$. La reparametrización por longitud de arco es por



Figura 5.3: El sistema de referencia móvil en la hélice circular.

lo tanto

$$\beta(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

La tangente esta dada por

$$\vec{T}(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_3 .$$

Derivando esta última relación se tiene

$$k(s) \overrightarrow{N}(s) = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \overrightarrow{e}_1 + -\frac{1}{2} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \overrightarrow{e}_2,$$

por lo que la curvatura es k(s) = 1/2 y la normal es

$$\vec{N}(s) = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_1 - \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_2$$

En particular, la binormal está dada por

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_3,$$

y derivando se tiene

$$\tau(s) \overrightarrow{N}(s) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \overrightarrow{e}_1 + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \overrightarrow{e}_2,$$

de donde se obtiene que la torsión es $\tau(s) = -1/2$.
Proposición 5.2. Sea α una curva espacial de curvatura no nula. Entonces α tiene torsión identicamente nula si y sólo si está contenida en un plano.

Demostración. Para ver que la condición de planaridad es suficiente para que la torsión se anule, basta haver leído el capítulo 2 (donde la torsión brilla por su ausencia). Más precisamente, en el caso de una curva plana, la binormal es constante e igual a la perpendicular al plano que contiene la curva. Nótese que la condición de que la curvatura no se anule permite que la normal, y por lo tanto también la binormal, estén bien definidas y sean continuas como funciones del parámetro de la curva.

Probaremos ahora que esta condición es necesaria. Como la torsión es nula, se sigue de las fórmulas de Frênet que la binormal $\vec{B}(s) = \vec{B}_0$ es constante. Por lo tanto, el plano osculador $\Omega = \Omega(s)$, es decir el plano ortogonal a la binormal \vec{B}_0 , es también constante. Como $\vec{T} = \vec{\alpha}'(s)$ está siempre en el plano osculador, se tiene

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s \vec{\alpha}'(u) \, du \in \left(\alpha(s_0) + \Omega\right)$$

está en un plano paralelo a Ω .

Nótese que el plano Ω de la demostración precedente puede caracterizarse, en términos del vector posición $\vec{\alpha}(s_0)$, como sigue:

$$\alpha(s_0) + \Omega = \left\{ 0 + \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^3 | \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{B}_0 = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{\alpha}(s_0) \right\}.$$

La condición de curvatura no nula es esencial, dado que la normal principal se indefinen en los puntos de curvatura nula. De hecho, mostraremos en los ejercicios como puede construirse un contraejemplo, utilizando funciones cuya expansión de Taylor se anule en un punto.

Ejercicios

- 1. Probar que la imagen de la curva $(\cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen} t)$ está en la superficie de una esfera de radio 1.
- 2. Parametrice la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano x + y + z = 0 y encuentre la longitud de arco de dicha intersección.
- 3. Muestre que una curva de curvatura nula es una recta.
- 4. Encuentre el plano normal, el plano rectificante y el plano osculador de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ el el punto (1, 1, 1).

- 5. Encuentre las ecuaciones del plano osculador, y del plano rectificante, de la curva $\vec{\alpha}(t) = (t, e^t, \cos t)$ en el punto $\vec{\alpha}(0)$.
- 6. Probar que la curva mas corta que une un punto del plano z = 0 con un punto del plano z = 1 es un segmento vertical.
- 7. Encuentre el plano osculador a la curva $\alpha(t) = (t, t^2, \cos t)$ en t = 0.
- 8. Encuentre la curvatura de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ en t = 0.
- 9. Encuentre la torsión de la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^7 - t^5}{t^4 + \cos t + e^t}, 5t^2, 3t^2 - 8\right)$$

en el punto $t = 27\sqrt{\pi}$.

- 10. Probar que si todos los planos rectificantes de una curva son paralelos, la curva es una recta.
- 11. Determine para que valores de p la curva $\alpha(t)=(t,t^2,t^p)$ tiene torsión nula.
- 12. Encuentre todos los puntos en los que el plano osculador de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ es perpendicular al plano x + 3y + 5z = 0.
- 13. Encontrar la curvatura y la torsión de una curva

$$\alpha(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big),$$

no necesariamente parametrizada por longitud de arco, en términos de las derivadas de x, y, y z. No es necesario simplificar.

14. Probar que una curva espacial tiene, cerca del punto s = 0, la siguiente expansión de Taylor a tercer orden:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \left(s - \frac{s^3k^2}{6}\right) \overrightarrow{T} + \left(\frac{s^2k}{2} - \frac{s^3k'}{6}\right) \overrightarrow{N} + \left(\frac{s^3k\tau}{6}\right) \overrightarrow{B} + O(s^4).$$

- 15. Utilice la fórmula precedente para calcular una expansión de Taylor a tercer orden para la proyección de la curva en su plano osculador. Haga lo mismo para el plano rectificante y para el plano normal.
- 16. Sean $\{\epsilon_n\}_n$ y $\{\delta_n\}_n$ successiones que convergen a 0 y que satisfacen las siguientes condiciones técnicas:

- ϵ_n no se anula.
- Existen constantes $\eta, \mu > 0$ que satisfacen una identidad del tipo $\eta \epsilon_n \leq \delta_n \leq \mu \epsilon_n$ para todo n suficientemente grande.
- Existen una constante $\nu > 0$ que satisface una desigualdad del tipo $\nu |\epsilon_n| \leq |\delta_n \epsilon_n|$ para todo *n* suficientemente grande.

Probar que los puntos $\alpha(s)$, $\alpha(s + \epsilon_n)$ y $\alpha(s + \delta_n)$ son no-colineales, para todo *n* suficientemente grande, y que la tangente unitaria al plano que pasa por estos tres puntos converge al vector binormal en *s*. Esto se expresa a menudo diciendo que el plano osculador es el plano que pasa por tres puntos consecutivos de la curva.

17. Mostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua y tiene todas sus derivadas nulas en 0. Utilizar esta función para definir una curva (infinitamente diferenciable) que contiene un segmento de recta, pero con segmentos no rectilineos a ambos lados. Utilizar esta idea para ilustrar, mediante un contraejemplo, que la hipótesis de curvatura no nula, en la Proposición 4.2, no puede eliminarse.

Hélices

Una curva en el espacio recibe el nombre de hélice si el vector tangente subtiende un ángulo constante con respecto a un vector unitario fijo \vec{a} .

Proposición 5.3. Una curva de curvatura no nula es una hélice si y sólo si su curvatura y torsión estan en una proporción constante.

Demostración Supongamos primero que $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{a} = \cos \theta$ es constante. Nótese que este producto puede escribirse como un coseno dado que está acotado por uno, en valor absoluto, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Derivando esta identidad, se obtiene $k(\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{a}) = 0$ y, siendo k no nula, se sigue que $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{a} = 0$. Como \overrightarrow{a} es un vector unitario concluimos que

$$\vec{a} = (\cos \theta) \vec{T} \pm (\sin \theta) \vec{B}$$
.

En particular, derivando $N \cdot \vec{a} = 0$, se tiene

$$k\left(\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{a}\right) + \tau\left(\left(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{a}\right) = 0,\right.$$

de donde

$$\tau = \frac{-k\left(\vec{T}\cdot\vec{a}\right)}{\left(\vec{B}\cdot\vec{a}\right)} = \frac{-k\cos\theta}{\pm\sin\theta}$$

Concluímos que $\frac{\tau}{k}$ es constante.

Por otro lado si $\frac{\tau}{k} = \lambda$ es constante, definimos $\vec{b} = \lambda \vec{T} - \vec{B}$ y tenemos $\vec{b}' = -\vec{B}' + \lambda \vec{T}' = -\tau \vec{N} + \lambda k \vec{N} = 0$. Se sigue que el vector \vec{b} es constante y $\vec{T} \cdot \vec{b} = \lambda$ es constante. Basta ahora definir $\vec{a} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Cuando existen puntos donde k = 0, la normal principal se indefine, por lo que también se indefine la binormal y la torsión. Existen curvas con puntos en los que su expansión de Taylor se anula en un punto, y a un lado de tales puntos es posible reemplazar el punto por su imagen especular, con respecto a un espejo que contenga al vector \vec{a} (ver Figura 5.4). Esto tiene el efecto de cambiar el signo de la torsión pero no compromete la condición que define una hélice.



Figura 5.4: Cambiando el signo de la torsión en una hélice con un punto con expansión de Taylor trivial. La parte del trazo a un lado del punto se refleja con respecto a un espejo sin comprometer la diferenciabilidad de la curva.

Proposición 5.4. La curvatura de la hélice es un múltiplo constante de la curvatura de su proyección ortogonal en el plano perpendicular al vector \vec{a} que la define (ver Figura 5.5).



Figura 5.5: La hélice circular y su proyección.

Demostración Sea P dicha proyección. La curva proyectada es $\beta = P \circ \alpha$. Se sigue que el vector tangente es $\frac{d}{ds} \overrightarrow{\beta} = P\left(\overrightarrow{\alpha}'\right) = P\left(\overrightarrow{T}_{\alpha}\right)$, por lo que el vector tangente unitario de la curva β está dado por $\overrightarrow{T}_{\beta} = \frac{P(\overrightarrow{T}_{\alpha})}{|P(\overrightarrow{T}_{\alpha})|}$. Como \overrightarrow{a} es un vector unitario, la proyección en su plano ortogonal está dada por la fórmula

$$P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{a}$$

En particular,

$$\frac{d}{ds} \stackrel{\rightarrow}{\beta} = P(\stackrel{\rightarrow}{T}) = \stackrel{\rightarrow}{T} - (\cos \theta) \stackrel{\rightarrow}{a}.$$

El largo de este vector es

$$\sqrt{\frac{d \overrightarrow{\beta}}{ds} \cdot \frac{d \overrightarrow{\beta}}{ds}} = \sqrt{\left[\overrightarrow{T} - (\cos\theta) \overrightarrow{a}\right] \cdot \left[\overrightarrow{T} - (\cos\theta) \overrightarrow{a}\right]} = |\sin\theta|.$$

Se concluye que, si σ denota la longitud de arco de la curva proyectada, se tiene la relación $\frac{d\sigma}{ds} = \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right| = |\sin \theta|$. Se sigue que la tangente unitaria a β es el vector

$$\vec{T}_{\beta} = \frac{d \vec{\beta}}{d\sigma} = \frac{d \vec{\beta}}{ds} / \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{|\sin\theta|} P\left(\vec{T}\right).$$

Ahora bien, la curvatura de β es el largo del vector derivado

$$\frac{d \stackrel{\neg}{T}_{\beta}}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{|\sin \theta|} P\left(\stackrel{\rightarrow}{T} \right) \right) = \frac{k}{(\sin \theta)^2} P\left(\stackrel{\rightarrow}{N} \right).$$

Pero $P\left(\overrightarrow{N}\right) = \overrightarrow{N}$, ya que \overrightarrow{N} es perpendicular a \overrightarrow{a} . De aquí sigue el resultado, pues \overrightarrow{N} es un vector unitario.

Ejercicios

- 1. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva en el espacio y sea $\beta(t) = (x(t), y(t), 0)$ su proyección en el plano XY. Demuestre que el largo de β es menor o igual que el de α , en el mismo intervalo, con igualdad si y sólo si α está contenida en un plano paralelo al plano XY.
- 2. Probar que la única curva cuya curvatura y torsión son constantes es la hélice circular, es decir la hélice cuya proyección es un círculo.
- 3. Utilice curvas que contengan un segmento de recta para construir un contraejemplo que pruebe que la condición de curvatura no nula es fundamental en la Proposición 4.3.
- 4. Suponga que $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ denota una curva espacial regular parametrizada por longitud de arco. Probar que α es una hélice en la dirección (0, 0, 1) si y sólo si z es una función lineal de s.
- 5. Probar que una hélice no tiene puntos dobles.
- 6. Sea α una curva en el plano XY y sea L una recta tangente a α en exactamente dos puntos. Probar que existe, salvo traslación vertical, exactamente una Hélice en la dirección (0, 0, 1) que se proyecta en α y que tiene una tangente doble que se proyecta en L.
- 7. Sea α una hélice en la dirección (0,0,1) que se proyecta en una curva β en el plano XY. Para cada valor t del parámetro, sea $\gamma(t)$ el punto de intersección de la recta tangente a α en t con el plano XY. Probar que γ es una involuta de β .
- 8. Probar que si una hélice en la dirección (0, 0, 1) tiene como proyección en el plano XY una espiral logarítmica centrada en el origen $(r = e^{\theta})$, entonces está contenida en un cono con vértice en el origen.

El teorema fundamental de la teoría de curvas

En el Capítulo 2 se demuestra que una curva plana está totalmente determinada por su función curvatura, salvo por una rotación traslación o reflexión del plano. En dimensión 3 tenemos un fenómeno similar dado por el siguiente resultado:

Proposición 5.5. Si α y β son dos curvas parametrizadas por longitud de arco, de curvatura no nula, cuyas curvaturas y torsiones satisfacen

$$k_{\alpha}(s) = k_{\beta}(s), \qquad \tau_{\alpha}(s) = \tau_{\beta}(s),$$

entonces existe una transformación euclidea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = T \circ \alpha$.

Recordemos que una transformación euclidea es un elemento del grupo euclideo, que es el grupo de transformaciones del plano generado por rotaciones y translaciones.

Demostración Aplicando una translación, si es necesario, puede suponerse que $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = 0$. Las bases

$$\left\{ \overrightarrow{T}_{\alpha}(s_0), \overrightarrow{N}_{\alpha}(s_0), \overrightarrow{B}_{\alpha}(s_0) \right\}, \qquad \left\{ \overrightarrow{T}_{\beta}(s_0), \overrightarrow{N}_{\beta}(s_0), \overrightarrow{B}_{\beta}(s_0) \right\}$$

de \mathbb{R}^3 son ambas ortonormales. También tienen la misma orientación, ya que

$$\vec{B}_{\alpha}(s_0) = \vec{T}_{\alpha}(s_0) \times \vec{N}_{\alpha}(s_0), \qquad \vec{B}_{\beta}(s_0) = \vec{T}_{\beta}(s_0) \times \vec{N}_{\beta}(s_0)$$

Se concluye que existe una rotación R que satisface las siguientes identidades:

$$R\left[\overrightarrow{T}_{\alpha}(s_{0})\right] = \overrightarrow{T}_{\beta}(s_{0}), \quad R\left[\overrightarrow{N}_{\alpha}(s_{0})\right] = \overrightarrow{N}_{\beta}(s_{0}), \quad R\left[\overrightarrow{B}_{\alpha}(s_{0})\right] = \overrightarrow{B}_{\beta}(s_{0}).$$

Ahora, las funciones

$$S_{\alpha} = (R \circ \overrightarrow{T}_{\alpha}, R \circ \overrightarrow{N}_{\alpha}, R \circ \overrightarrow{B}_{\alpha}), \qquad \qquad S_{\beta} = (\overrightarrow{T}_{\beta}, \overrightarrow{N}_{\beta}, \overrightarrow{B}_{\beta}),$$

las que pueden verse como funciones definidas en un intervalo I con valores en \mathbb{R}^9 , son soluciones del mismo sistema de ecuaciones lineales con las mismas condiciones iniciales. Deben por lo tanto coincidir. En particular $R \circ \vec{T}_{\alpha}$ coincide con \vec{T}_{β} , por lo que, integrando, se tiene

$$R[\alpha(s)] = R[\alpha(s_0)] + \int_{s_0}^{s} R[\vec{T}_{\alpha}(s)] \, ds = \beta(s_0) + \int_{s_0}^{s} \vec{T}_{\beta}(s) \, ds = \beta(s),$$

como se afirmaba.

La condición de que la curvatura no sea nula es fundamental, ya que, como hemos mencionado en ocasiones anteriores, es posible construir contraejemplos utilizando funciones cuya expansión de taylor se anule en un punto.

Ejercicios

- 1. Probar que si α_1 y α_2 son curvas parametrizadas por longitud de arco cuyas respectivas funciones curvatura y torsión satisfacen $k_1(s) = k_2(s)$ y $\tau_1(s) = -\tau_2(s)$, entonces, salvo por un movimiento rígido, una de las curvas es una imágen especular de la otra.
- 2. Probar que si α_1 y α_2 son curvas parametrizadas por longitud de arco cuyas respectivas funciones curvatura y torsión satisfacen $k_1(s) = \lambda k_2(s)$ y $\tau_1(s) = \lambda \tau_2(s)$, entonces, salvo por un movimiento rígido, una de las curvas es una ampliación o reducción de la otra.
- 3. Utilice curvas que contengan un segmento de recta para construir un contraejemplo que pruebe que la condición de curvatura no nula es fundamental en la Proposición 4.5 (sugerencia: probar que en una curva que contiene un segmento de recta, una porción de la curva puede girarse en el eje generado por el segmento sin alterar la curvatura ni la torsión).
- 4. Probar que, si α_1 y α_2 son curvas parametrizadas por longitud de arco cuyas tangentes respectivas satisfacen $\overrightarrow{T}_1(s) = \overrightarrow{T}_2(s)$ para todo s, entonces α_1 se obtiene desplazando la curva α_2 . Que puede decirse si, con notaciones análogas, se tiene $\overrightarrow{B}_1(s) = \overrightarrow{B}_2(s)$ para todo s?

El número de enlace.

El número de enlace, también llamado índice de ligazón, es un número que juega el mismo papel que el número de vueltas, en el caso de dos curvas en el espacio. Para describirlo, comenzaremos con el caso de un círculo, digamos el dado por la parametrización

$$\alpha(t) = \Big(\cos t, \sin t, 0\Big).$$

El complemento D del trazo de esta curva puede visualizarse como el resultado de rotar, al rededor del eje Z, la región plana

$$P = \left\{ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x \ge 0, \ (x, z) \ne (1, 0) \right\}.$$

 \square

En otras palabras, existe una función bien definida $f: D \mapsto P$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right)$$

El número de enlace de α con una segunda curva β se define, en este caso, como el número de vueltas de la curva $f \circ \beta$. Es posible calcular el número



Figura 5.6: El número de enlace de una curva respecto de un círculo.

de enlace NE(α, β) mediante el siguiente algoritmo:

Deformando la curva brevemente, puede suponerse que su proyección en el plano X - Y corta al círculo unitario ortogonalmente en una cantidad finita de puntos como se muetra en la Figura 5.7A. A continuación se aplica la fórmula

NE
$$(\alpha, \beta) = \frac{n_1 + n_2 - n_3 - n_4}{2},$$

donde n_i representa el número de cruces del tipo i, definidos como se muestra en la Figura 5.7B.

Nótese que las sumas $n_1 + n_3$ y $n_2 + n_4$ son siempre iguales, dado que representan el número de veces que la projección entra o sale del interior del círculo. Se concluye de aquí la siguiente la fórmula:

$$NE(\alpha, \beta) = n_1 - n_4 = n_2 - n_3.$$

Tal cómo ocurre con el número de vueltas, el número de enlace permite determinar si una curva puede deformarse a un punto en el complemento del círculo. Sin embargo, si la curva verde representa una cuerda que se



Figura 5.7: Una curva con cruces transversales (A), y los cuatro tipos básicos de cruces en el cálculo del número de enlace (B).

enlaza a un aro de metal, la condición de que el número de enlace se anule no es suficiente para asegurar que la cuerda pueda retirarse. El ejemplo más sencillo de este fenomeno es el Enlace de Whitehead ilustrado en la Figura 5.8A. El número de enlace puede calcularse para dos curvas cerradas



Figura 5.8: Dos representaciones del enlace de Whitehead.

arbitrarias en el espacio tridimensional. Puede probarse que este número es un invariante, en el sentido que no cambia cuando las dos curvas se deforma continuamente sin cortarse en nigún momento durante la deformación. El número de enlace no resulta afectado cuando una de las curvas se atraviesa a sí misma, por ejemplo para desarmar un nudo. Este tipo de operaciones nos permite desatar el enlace de Whitehead. No obstante lo anterior, no es claro que el número de enlace sea suficiente, en general, para determinar cuando dos curvas pueden separarse mediante operaciones del tipo indicado, ya que, en principio sería posible enlazar curvas cerradas alrededor de sus nudos, no pudiendo así desatarlas. Resolver el problema de si el número de enlace es un invariante completo en este caso nos llevaría al estudio de grupos de nudos, lo que escapa al propósito de estas notas.

Ejercicios

1. Calcule el número de enlace para los dos pares de curvas de la Figura 5.9.



Figura 5.9: Los enlaces del Ejercicio 1.

2. En la Figura 5.10 se ilustran los llamados Movimientos de Reidemeister. Pruebe que estos movimientos no afectan el número de enlace.

Figura 5.10: Movimientos de Reidemeister.

3. Muestre que las dos representaciones del Enlace de Whitehead en la Figura 5.8 son equivalentes utilizando los movimientos de Reidemeister.

Capítulo 6

Variedades en \mathbb{R}^n

En los capitulos anteriores definimos una curva como una función definida en un intervalo. En principio, uno podría utilizar la misma idea para estudiar variedades de dimensión superior. Esto tiene sentido en lo que respecta a sus propiedades locales. Sin embargo, la existencia de una topología mucho mas compleja en el caso general motiva introducir una teoría ad hoc que facilite el estudio de dichos fenómenos. La solución usual es dividir la teoría en dos partes. En una se estudian trozos de una variedad para los cuales la interpretación como funciones continuas resulta apropiado. La segunda parte consiste en definir una noción de pegado de estos trozos que facilite el estudio de las propiedades globales de la variedad completa. Una alternativa, usada a menudo en topología, consiste en definir tales trozos en términos de funciones continuas definidas en paralelógramos o símplices, lo que conduce al concepto topológico de triangulación, pero no es demasiado útil para nuestros propósitos, va que necesitamos hacer uso de las propiedades de la derivada, y no es claro como definir esta en una esquina o borde. Ocuparemos por lo tanto un camino distinto.

La definición formal usual de una variedad diferenciable interpreta esta como un espacio topológico que localmente se asemeja al espacio euclideo \mathbb{R}^n en una vecindad de cada punto. Para ser precisos, cada punto de una variedad debe tener una vecindad que es difeomorfa a \mathbb{R}^n . Para un valor fijo de *n*, estos objetos se denominan *n*-variedades. Es importante destacar, no obstante, que el idioma español utiliza el término variedad, tanto para el inglés *manifold*, al que hacemos referencia en este capítulo, como para el inglés *variety*, término usado en la geometría algebraica. En cualquier caso, es importante destacar que el término *variedad* hace referencia a un conjunto de puntos, más bien que a la función que lo parametriza, a diferencia de las convenciones utilizadas en el estudio de curvas.

Intuitivamente, quisieramos pensar en una variedad unidimensional como el trazo de una curva, pero esta idea intuitiva tiene algunas salvedades. Variedades de dimensión uno incluyen líneas y crculos, pero no, por ejemplo, la llamada figura 8 (ver Figura 5.1.A), donde ninguna vecindad del punto de cruce es homeomorfo a la recta. Nótese que, sin embargo, la figura 8 puede constituir el trazo de una curva. Nuestra definición, incluso en dimensión uno, debe descartar tales ejemplos.

Las variedades bidimensionales, también llamadas superficies, incluyen el plano, la esfera y el toro, familiares para nosotros como sub-variedades del espacio tridimensional, pero también variedades mas exóticas, como el plano proyectivo o la botella de Klein (Ver Figura 5.1.B) que no pueden incrustarse en el espacio tridimensional. Pese a que el dibujo usual de la botella de Klein parece intersectarse a sí misma, para no caer en el mismo problema que la figura 8, esta figura debe interpretarse como contenida en un espacio euclideo de dimensión mayor, donde estos cruces, en realidad, no tienen lugar.



Figura 6.1: La Figura 8 y la botella de Klein.

Como se ilustra ya en los ejemplos antes mencionados, una variedad tiene, además de sus propiedades locales que imitan al espacio euclideo, una estructura global que puede distingirla de este. Esto se refleja en lo que el cálculo puede enseñarnos de cada variedad. La esfera es diferente del plano euclideo en que la primera es compacta, por lo que toda función continua en ella tiene un máximo y un mínimo. Esto impide describir la esfera como la imagen de una función continua definida en un conjunto abierto del plano. Sin embargo, como el cartógrafo sabe, es posible tener mapas de algunas zonas de una esfera, es decir, una biyección bicontinua (homeomorfismo) entre los puntos de una región de la variedad y los de una región del n-espacio euclideo. Estos mapas o cartas (del inglés *chart*) deben cubrir toda la variedad. En regiones que se encuentran en más de

un mapa, estos múltiples mapas deben ser consistentes, en el sentido en que se relacionan mediante una *función de transición* que debe tener buenas propiedades. En nuestro caso, se pide explícitamente que la función de transición preserve la estructura diferencial, es decir sea un difeomorfismo.

Las variedades pueden equiparse con estructuras adicionales, de las cuales la estructura diferencial es sólo un ejemplo. El concepto de variedad Riemaniana, en el que se agrega una estructura de espacio métrico, permite definir ángulos y distancias. Las variedades simplécticas sirven como espacios de fase del formalismo Hamiltoniano en mecánica clásica, mientras que las variedades Lorentzianas cuadridimensionales modelan el espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general.

Si bién lo dicho hasta aquí es mas bién consistente con una definición abstracta de variedad, estas notas tienen como meta evitar la necesidad de una formación previa significativa en topología, con la que dicha definición sería más natural. Hemos, pues, optado por una definición mas acorde con pre-requisitos que se limitan al cálculo multivariado. Por esta razón, nuestra definición formal introduce variedades como subconjuntos del espacio euclideo.

Antes de dar la definición formal necesitamos citar algunos conceptos topológicos que resultan ineludibles. Si $X \in Y$ son subconjunto de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente, una función $f: X \to Y$ se dice continua si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X que converge a un límite $x \in X$, la sucesión de sus imágenes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la imagen f(x) de x. Diremos que f es un homeomorfismo si es biyectiva, continua, y con inversa continua. Dos conjuntos $X \in Y$ se dicen homeomorfos si existe tal homeomorfismo $f: X \to Y$. No es cierto que la inversa de una función continua e invertible es necesariamente continua. De hecho, existe una función continua y biyectiva de la recta a la figura 8 (ver Figura 5.5) cuya inversa no es continua.

La noción de continuidad dada arriba es un ejemplo de lo que el topólogo conjuntista llamaría la topología de subespacio. No entraremos en los detalles técnicos de esta definición, pero enfatizaremos el hecho de que en estas notas se asume que todas las variedades mencionadas son subespacios del espacio euclideano \mathbb{R}^n . Bástenos, por ahora, notar que el concepto puede extenderse a un contexto más abstracto, donde la condición de ser un subespacio de \mathbb{R}^n se remueve, pero esto tendrá pocas consecuencias prácticas.

Ejemplo 6.1. El disco *n*-dimensional abierto $\{v \in \mathbb{R}^n | |v| < 1\}$ centrado en

el origen es homeomorfo a \mathbb{R}^n mediante la función

$$f(v) = \frac{v}{1+|v|}.$$

La función inversa está dada por

$$g(v) = \frac{v}{1 - |v|}.$$

Ejemplo 6.2. El cubo *n*-dimensional de lado 2 centrado en el origen es homeomorfo a la esfera unitaria mediante la función f(v) = v/|v|. La función inversa está dada por $g(v) = v/|v|_s$ donde $|(x_1, \ldots, x_n)|_s = \max_{i=1}^n |x_i|$ es la llamada norma del supremo.

Ejemplo 6.3. La función $f: [0, 2\pi) \to S^1$ definida por

$$f(t) = \left(\cos t, \sin t\right)$$

donde S^1 es el círculo unitario, es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo, ya que su inversa no es continua en (1,0). De hecho, la sucesión $a_n = f(2\pi - 1/n)$ converge a (1,0), sin embargo sus pre-imágenes no convergen a 0.

Definición formal de variedad

La definición usual de variedad en topología, que citamos aquí pero no usaremos en lo que sigue, es la siguiente: Una variedad es un espacio de Hausdorff segundo contable en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa al espacio euclideo. A fin de evitar la necesidad de conocimientos previos de topología, daremos una definición más limitada, pero, al mísmo tiempo, más concreta. Definiremos una variedad como un subconjunto del espacio euclideano \mathbb{R}^n . En este sentído, definimos pues una subvariedad de \mathbb{R}^n , o, en otras palabras, una variedad euclidea. Para que un subconjunto S del espacio euclideano sea una m-variedad euclidea, debe cumplirse la siguiente condición local:

Condición local: Para cada punto $s \in S$ existe una vecindad V de s y una función $\phi_V : D \to (V \cap S)$, donde D es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m , que es continua, biyectiva y con inversa continua.

El entero *m* recibe el nombre de dimensión de la variedad. Nótese que la inversa ϕ_V^{-1} , de la función de arriba, sólo necesita estar definida en los puntos

de $V \cap S$. La continuidad en este conjunto debe entenderse en el sentido precisado al final de la introducción. En estas notas estamos interesados en el concepto más específico de variedad diferencial. Esto significa que debemos dotar a nuestras variedades de cierta estructura adicional. Esta estructura nos permitirá utilizar herramientas del cálculo en su estudio.

Una manera de asegurar que se cumple la condición local, es mediante el uso de un atlas. Un atlas es un conjunto de funciones biyectivas y bicontinuas, llamados mapas o cartas, entre abiertos de \mathbb{R}^m y abiertos de la variedad que la recubren. En símbolos, existe una familia $\{\phi_i\}_{i\in I}$ de funciones, cada una de las cuales establece una biyección bicontinua entre un abierto D_i de \mathbb{R}^m y un conjunto de la forma $S \cap U_i$ donde U_i es un abierto de \mathbb{R}^n . Los conjuntos de la forma $S \cap U$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n , se denominan abiertos de S. Para que un conjuto de tales funciones sea un atlas, se requiere que cada punto esté en la imagen de algun mapa, es decir $\bigcup_{i\in I} U_i \cap S = S$. La condición local asegura la existencia de al menos un atlas.

Por cierto, un punto puede estar en la imagen de más de un mapa, y en tal caso, los mápas deben resultar coherentes, es decir que las funciónes de transición

$$\psi_{i,j} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(S \cap U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(S \cap U_i \cap U_j),$$

deben ser continuas. Esta condición es inmediata, ya que composición de funciones continuas es continua, pero uno puede dar mayor estructura a una variedad simplemente utilizando una condición de coherencia más restrictiva. Diremos que un atlas es diferenciable si cada función de transición es diferenciable. Con esta definición, una variedad diferenciable es una variedad provista de un atlas diferenciable.

Hay una observación que es importante realizar en este punto. El objetivo de considerar variedades como subconjunto del espacio euclideo no tiene otro objetivo que evitar entrar en consideraciones topológicas más profundas pero no juega ningún papel a la hora de dotar a la variedad de una estructura diferencial. Son los mapas quienes cumplen esa función. Se sigue que, en principio, no hay ninguna relación entre la estructura diferencial de una variedad y la de su espacio ambiente, como será claro en los ejercicios. Sin embargo, el caso de variedades cuya estructura diferencial puede interpretarse como una restricción de la de su espacio ambiente juegan un papel importante en la teoría, como se verá más adelante.

La definición precedente se extiende a muchos tipos de estructuras. Podemos hablar de variedades C_k , variedades C_{∞} , variedades analíticas, variedades holomorfas, o incluso variedades lineales, simplemente requiriendo



Figura 6.2: El mapa de transición entre dos mapas de un atlas.

que nuestras funciones de transición tengan la propiedad correspondiente. En estas notas asumiremos a menudo que nuestras variedades son de clase C_{∞} , pero muchas propiedades requieren sólo C_2 o C_3 .

Una carta $\phi: D \to U \cap S$ es compatible con un atlas diferenciable \mathfrak{A} si puede agregarse al atlas y aún se tiene un atlas diferenciable. Del mismo modo, la unión de dos atlas es un atlas. Si este atlas unión es diferenciable, diremos que las estructuras diferenciables definidas por cada uno son compatibles. El conjunto de todas las cartas compatibles con un atlas dado es un atlas maximal, al cual ya no se pueden agregar nuevas cartas (manteniendo la condición de compatibilidad). Un atlas maximal es enorme e inmanejable en la práctica, pero su existencia tiene importancia teórica. A menudo es conveniente asumir que el atlas que define una variedad es maximal para simplificar algunas definiciones. Por ejemplo, deberíamos considerar dos variedades diferenciables (S, \mathfrak{A}) y (S, \mathfrak{A}') con el mismo conjunto subyacente como idénticas si el atlas \mathfrak{A} y el atlas \mathfrak{A}' son compatibles. El uso de un atlas maximal nos permite evitar esa sutileza.

Ejemplo 6.4. La esfera tiene una estructura de variedad diferencial, utilizando el mapa

$$\psi(\theta, \eta) = (\cos\theta\cos\eta, \sin\theta\cos\eta, \sin\eta)$$

definido al interior del rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ o al interior del rectángulo $[-\pi, \pi] \times [0, \pi]$. Las imágenes de estas dos cartas cubren toda la esfera

excepto por los polos. En una vecindad de cada polo puede utilizarse el mapa

$$f(x,y) = (x, y, \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

con el signo positivo para el polo norte y el signo negativo para el polo sur. Esto dá un atlas para la esfera compuesto de cuatro mapas.

Ejemplo 6.5. La superficie del cubo de lado 2 centrado en el origen es homeomorfo, como se vió en el ejemplo 5.2 a la esfera unitaria vía las proyecciones respectivas (ver Figure 5.3). Esto nos permite definir una estructura de variedad diferenciable en el cubo vía dicho homeomorfismo. Nótese que, sin embargo, esta función no es diferenciable en los puntos que corresponden a las esquinas u aristas del cubo.



Figura 6.3: Proyección de un cubo en la esfera.

Ejercicios

1. El toro puede definirse como la imagen de la función $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u,v) = \Big(\cos u(a+b\cos v), \sin u(a+b\cos v), b\sin v\Big).$$

Utilice esta información para construir un atlas del toro.

- Describa un atlas para la estructura diferenciable del cubo del ejenplo 5.3.
- 3. Describa un atlas para el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. Describa un atlas para el paraboloide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

5. Describa un atlas para el hiperboloide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

6. Describa un atlas para el hiperboloide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Funciones suaves y difeomorfismos

Sean $S ext{ y } S'$ dos variedades euclideas diferenciables, no necesariamente de la mísma dimensión. Sea m la dimensión de $S ext{ y } t$ la dimensión de S'. Una función $f: S \to S'$ se dice suave si, para cada punto $v \in S$, existen mapas $\phi: D \to S \cap U ext{ y } \psi: D' \to S' \cap U'$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $D' \subseteq \mathbb{R}^t$, U es vecindad de $v ext{ y } U'$ es vecindad de f(v), tales que la composición $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ es diferenciable. Nótese que, por la condición de compatibilidad en la definición de atlas diferenciable, esta definición no depende del mapa escogido en cada punto. Cualquer elección alternativa tendrá la forma $h = \rho^{-1} \circ f \circ \lambda$, para otro par de mapas $\lambda: B \to S \cap V ext{ y } \rho: B' \to S' \cap V'$, donde V es vecindad de v, V' es vecindad de f(v), B abierto en $\mathbb{R}^m ext{ y } B'$ abierto en \mathbb{R}^t . Por lo tanto, puede escribirse en la forma

$$h = \left(\psi^{-1} \circ \rho\right)^{-1} \circ g \circ (\phi^{-1} \circ \lambda).$$

Recuérdese que ambas funciones, $\psi^{-1} \circ \rho \neq \phi^{-1} \circ \lambda$ son difeomorfismos, por lo que sus matrices jacobianas son invertibles. Concluímos que el rango de la matriz jacobiana de f está bien definido con independencia de la elección de mapas locales. Una función suave se denomina una inmersión si su jacobiano es injectivo y una submersión si su jacobiano es epiyectivo. En el caso en que el jacobiano sea invertible, lo que sólo puede ocurrir si m = t, hablaremos de un difeomorfismo local. Un difeomorfismo (a secas) es un difeomorfismo local biyectivo. El Teorema de la función inversa implica que todo difeomorfismo local induce un difeomorfismo entre una vecindad de cada punto y una vecindad de su imagen. Esto puede aplicarse, en particular, a un difeomorfismo,a fin de probar que su inversa es también diferenciable.



Figura 6.4: Definición de diferenciabilidad por medio de mapas.

En topología, una función continua con inversa continua se denomina un homeomorfismo. Un difeomorfismo es, pues, un homeomorfismo, pero la inversa no es necesariamente cierta como se verá en los ejemplos. De hecho, pueden existir variedades *homeomorfas* (es decir que existe un homeomorfismo entre ellas) que no sean difeomorfas.

Una subvariedad T de una variedad S es un subconjunto que tiene una estructura de variedad diferencial para la cual la inclusión $i : T \to S$ es una inmersión. Nótese que el cubo de la Figura 5.3 no es una subvariedad (diferenciable) del espacio tridimensional. Una incrustación es una función diferenciable inyectiva que es un difeomorfismo con su imagen. En particular, la imagen debe ser una subvariedad. En lo que sigue, a menudo especificaremos que una variedad debe considerarse como una subvariedad del espacio euclideo (o de alguna otra variedad ambiente) refiriendonos a ella como una variedad incrustada. Una inmersión inyectiva no es necesariamente una incrustación. De hecho, no es dificil encontrar una curva regular inyectiva cuya imagen sea la Figura 8, pero esta última no es una variedad.

Ejemplo 6.6. La representación usual de la botella de Klein, como la que se aprecia en la Figura 5.1, es una imersión en el espacio tridimensional, pero no una incrustación, ya que no es inyectiva. Es posible probar que no existe una incrustación (ni siquiera topológica) de la botella de Klein en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 6.7. Una variedad diferenciable homeomorfa a la esfera S^n que



Figura 6.5: Una inmersión de la recta cuya imagen es la Figura 8.

no es difeomorfa a esta recibe el nombre de esfera exótica. Se sabe que estas no existen para $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61\}$, pero existe una construcción, debida a John Milnor, de tales estructuras en dimensión 7. La existencia de esferas exóticas en dimensión 4 es aún un problema abierto.

Ejercicios

- 1. Demuestre que el cubo, con la estructura diferencial del ejemplo 5.5 es difeomorfo a la esfera.
- 2. Demuestre que la esfera no puede ser difeomorfa al plano.
- 3. Demuestre que si dos toros se obtienen asignando distintos valores a *a* y *b* en la parametrización del ejercicio 1 de la sección anterior, las superficies así obtenidas son difeomorfas.
- 4. Probar que la esfera y el toro no son difeomorfas (sugerencia: Probar que toda curva cerrada incrustada en la esfera puede contraerse a un punto sin salirse de la esfera. Probar que esto no es cierto para el toro encontrando una curva con una integral de linea no trivial e invariante por deformaciones).
- 5. Pruebe que una inmersión biyectiva $\phi : S \to \mathbb{R}^n$, donde S es una variedad compacta, es una incrustación (Recuerde que toda sucesión en un conjunto compacto tiene una subsucesión convergente. Asimismo, recuerde que si cada subsucesión de una sucesión dada $\{s_n\}_n$ tiene, a su vez, una subsucesión que converge a L entonces la sucesión original también converge a L).

Espacio tangente y diferencial

La razón para definir el espacio tangente a una variedad es generalizar la idea de vector en el espacio euclideo a una variedad más general. Es esta

la motivación para separar los conceptos de punto y vector en los capítulos precedentes. En una variedad general, no es posible restar dos puntos para obtener el vector que vá de un punto a otro. Es necesario dar una definición diferente y más abstracta.

Si tenemos el gráfico de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, esperamos que el plano tangente sea el gráfico de una aproximación lineal, es decir, de un desarrollo de Taylor a primer orden de la función. En términos de ecuaciones, el gráfico tiene una parametrización, es decir un mapa, del tipo

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=\Big(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n)\Big).$$

El plano tangente a este gráfico, en el punto imagen del valor (a_1, \ldots, a_n) del argumento, debe tener la parametrización siguiente

$$\tau(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_1,\ldots,x_n, f(a_1,\ldots,a_n) + \sum_{i=0}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n)\right).$$

Una simple manipulación algebraica nos permite escribir esta fórmula, vectorialmente, como sigue:

$$\tau(x_1,\ldots,x_n) = \phi(a_1,\ldots,a_n) + \sum_{i=0}^n (x_i - a_i) \left(\overrightarrow{e}_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n) \overrightarrow{e}_{n+1} \right).$$

El vector $\vec{e}_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_{n+1}$ de arriba puede interpretarse fácilmente como el vector tangente a la curva definida por

$$\lambda(t) = \phi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Esta definición tiene sentido en general, con una salvedad. Está definida en términos del espacio ambiente, por lo que no es suficiente aplicarlo a una variedad cualquiera sinó que debe ser una variedad inmersa en el espacio euclideano. En ese caso, los vectores tangentes a las curvas coordenadas, como la descrita arriba, generan un subespacio de la misma dimensión que la de la variedad. Esta será nuestra definición formal:

El espacio tangente T_pS a una variedad inmersa en \mathbb{R}^n es el espacio generado por los espacios tangentes a todas las curvas contenidas en la variedad.

Em la Figura 6.6 se observa una representación de una superficie con su plano tangente. La parte verde es cubierta por el mapa de la izquierda, definido en una región de \mathbb{R}^m . El plano celeste es el plano tangente en un punto. El



Figura 6.6: Mapa de una superficie y de su plano tangente. Nótese que la curva se aprecia en el mapa de la superficie.

vector tangente a la curva en dicho punto corresponde a un vector del plano tangente. El vector tangente a la curva en un punto distinto pertenece a un vector tangente diferente, el que no se muestra en la imagen. Es por esto que, en una superficie, sólo podemos hablar de vectores tangentes en un punto, pero estos, en principio, no tienen sentido en un punto diferente.

Nótese que, en particular, nuestra definición de espacio tangente se aplica al espacio euclideano usual, donde el espacio tangente coincide, en cada punto, con el espacio mismo. Esta es definitivamente la razón para distinguir puntos de vectores en los capítulos precedentes, ya que no se quiere confundir los puntos de la variedad con los vectores tangente a la misma en un punto, pues ambos conceptos definen categorías diferentes de objetos en el contexto general.

Existe una segunda manera de definir el fibrado tangente, que es mediante el traslado de la estructura de espacio vectorial del dominio de cada mapa en un atlas. Esta idea permite extender la noción de espacio tangente a variedades no incrustadas. A fin de introducir esta noción en forma precisa, es más sencillo utilizar nuestra noción provisoria para introducir el concepto de diferencial, para finalmente dar la definición completa. Así procedemos aquí.

Sea $f : S \to S'$ una función diferenciable entre dos variedades. La

derivada o diferencial es la función $d_p f: T_p S \to T_{f(p)} S'$ definida por

$$d_p f\left(\stackrel{\rightarrow}{\alpha}'(0) \right) = \stackrel{\rightarrow}{\beta}'(0),$$

cada vez que β sea la composición dada por $\beta(t) = f(\alpha(t))$ y p sea el punto base $p = \alpha(0)$. Podemos aplicar esto en particular a los mapas $\phi: D \to S$ del atlas que define la estructura diferencial de la variedad, en una vecindad del punto $p = \phi(a)$, para obtener una base $\{\vec{\varepsilon}_i\}_{i=1}^n$ del espacio T_pS definida mediante $\vec{\varepsilon}_i = d_a \phi(\vec{e}_i)$. Una construcción análoga para el mapa $\psi: D' \to S'$, que nos dá coordenadas en una vecindad del punto $f(p) = \psi(b)$, nos entrega la base $\vec{\eta}_i = d_b \psi(\vec{e}_i)$. el punto $b \in D'$ se interpreta como la imagen b = $g(a) = (g_1(a_1, \dots, a_m), \dots, g_t(a_1, \dots, a_m))$, en términos de las coordenadas locales, dadas por la relación $f \circ \phi = \psi \circ g$, o, lo que es lo mismo, por

$$f\Big(\phi(x_1,\ldots,x_m)\Big)=\psi\Big(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_t(x_1,\ldots,x_m)\Big).$$

Esto nos permite traducir, en términos de dichas coordenadas, el diferencial mediante la identidad

$$d_p f\left(\sum_{i=0}^m a_i \stackrel{\overrightarrow{\varepsilon}}{\varepsilon}_i\right) = \sum_{j=0}^t \left(\sum_{i=0}^m a_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_m)\right) \stackrel{\overrightarrow{\eta}}{\eta}_j.$$

Ahora estamos en posición de dar una definición intrínseca de espacio tangente, la que no depende de que tengamos una superficie incrustada. si tenemos dos mapas $\phi: D \to S$ y $\rho: B \to S$ que satisfacen

$$\phi(x_1,\ldots,x_m) = \rho\Big(h_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,h_t(x_1,\ldots,x_m)\Big)$$

en una vecindad del punto $p = \phi(a_1, \ldots, a_m) = \rho(b_1, \ldots, b_m)$, podemos identificar una copia $\vec{\varepsilon}_i$ del vector \vec{e}_i de la base canónica de \mathbb{R}^m , correspondiente al primer mapa, con la combinación

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_m) \stackrel{\rightarrow}{\zeta}_j, \tag{6.1}$$

en términos de una copia diferente $\{ \stackrel{\rightarrow}{\zeta} \}_{i=1}^{m}$ de la base canónica de \mathbb{R}^{m} , correspondiente al segundo mapa. Realizando esta identificación para todos



Figura 6.7: El diferencial. Una función definida a nivel de espacios tangentes.

los mapas posibles en una vecindad de un punto dado se obtiene un espacio vectorial abstracto de dimensión m. El hecho de que estas identificaciones son compatibles entre sí es una consecuencia de la regla de la cadena cuyos detalles dejamos al lector. Esta construcción entrega una construcción abstracta del espacio tangente que no precisa que las variedades consideradas estén incrustadas en el espacio euclideano.

Una reflexión final. Dado que los vectores $\vec{\epsilon}_i$ son sólo una copia de los vectores de la base canónica, podría parecer que la última definición si nos entrega una manera de identificar vectores tangentes, al menos en puntos diferentes de una misma carta, sin embargo, el hecho de que los coeficientes en la ecuación (6.1) no sean constantes implica que tal identificación no es coherente con la identificación entre cartas utilizada para definir vectores tangentes como elementos de un epacio abstracto. Por ejemplo, los vectores $\vec{\eta}_j$ tienen distintas coordenadas con respecto a los vectores $\vec{\epsilon}_i$ en puntos distintos, a no ser que las derivadas parciales en (6.1) sean constantes, lo que implicaría que el cambio de variables en una función afin.

Ejercicios

1. Encuentre el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. En el punto $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

- 2. Encuentre todos los puntos del toro del ejercicio 1 de la página 80 donde su plano tangente es horizontal.
- 3. Encuentre todos los puntos del toro del ejercicio 1 de la página 80 donde su plano tangente es vertical.
- 4. Demuestre que el plano tangente al paraboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ no puede ser vertical en ningún punto del plano.
- 5. Sea S una superficie en el espacio y sea $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ la proyección en el plano XY. Probar que $d_p\pi$ es un isomorfismo de T_pS en \mathbb{R}^2 (identificado con cu propio plano tangente) si y sólo si T_pS no es vertical.
- 6. Considere el toro

$$T = \left\{ (z, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4 \middle| |z| = |u| = 1 \right\}$$

Calcule $d_{(1,1)}f$ si $f(z, u) = (z^a u^b, z^c u^d)$.

El fibrado tangente y los campos vectoriales

Como se discutió en la sección anterior, el espacio tangente varía punto a punto, por lo que vectores tangentes en puntos diferentes no son comparables. Esto es una limitación, dado que la idea de una magnitud vectorial que varíe continuamente de un punto a otro es necesaria en diversas aplicaciones de la teoría. Para dar sentido a esta idea es conveniente interpretar los espacios tangentes en diversos puntos como subconjuntos de una misma variedad. A fin de dar esta definición sin entrar en un profundo estudio de temas que conciernen a la topología, debemos limitarnos a su estudio en el contexto de variedades incrustadas en el espacio euclideo.

Precisando lo anterior, consideramos una subvariedad S del espacio Euclideo \mathbb{R}^n y definimos su fibrado tangente como el par (TS, π) donde TS es la subvariedad del espacio Euclideo \mathbb{R}^{2n} definida por

$$TS = \left\{ \left(a, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} | a \in S, \ \overrightarrow{v} \in T_a S \right\}.$$

Utilizamos la notación vectorial en la segunda coordenada para recordar que debe interpretarse como un vector. Debemos comprobar que este conjunto así definido satisface la definición de subvariedad. En otras palabras, debemos probar que cada punto de este conjunto tiene una vecindad (en \mathbb{R}^{2n}) cuya intersección con TS es la imagen de un mapa con derivada inyectiva. Como S es una subvariedad (por hipótesis), existe una vecindad $U \subseteq \mathbb{R}^n$

de un punto arbitrario $a \in S$ con esta propiedad. Es decir, existe un mapa biyectivo $\phi : D \to U \cap S$, con diferencial inyectivo. Definimos, en base a este, un mapa

$$\psi: D \times \mathbb{R}^m \to (U \times \mathbb{R}^n) \cap TS$$

mediante la ecuación

$$\psi\left(x, \overrightarrow{w}\right) = \left(\phi(x), d_x \phi\left(\overrightarrow{w}\right)\right).$$

Se comprueba directamente que esta función es inyectiva. De hecho, si $\psi(x, \vec{w}) = \psi(y, \vec{u})$, se tiene en particular $\phi(x) = \phi(y)$, y por lo tanto x = y, dado que ϕ es inyectiva. La identidad $\vec{w} = \vec{u}$ sigue ahora de la inyectividad de la diferencial en x. La epiyectividad es aún más simple. Todo punto $(a, \vec{v}) \in (U \times \mathbb{R}^n) \cap TS$ satisface $a \in U$ por lo que $a = \phi(b)$ para algún elemento $b \in D$, y el hecho de que el diferencial del mapa sea epiyectivo como función al espacio tangente termina la demostración. Para comprobar que la diferencial de ψ es inyectiva, realizamos un cálculo directo. Sea β una curva $en(U \times \mathbb{R}^n) \cap TS$, que escribimos como imagen $\beta = \psi \circ \alpha$ de una curva α en $D \times \mathbb{R}^m$. Debemos probar que, si α tiene una derivada no nula, entonces lo mismo ocurre con su imagen β . Observemos primero que α puede escribirse en coordenadas como sigue:

$$\alpha(t) = \left(\gamma(t), \overrightarrow{\rho}(t)\right).$$

De aquí obtenemos que su vector tangente en un punto $p = \alpha(0)$ es

$$\vec{\alpha}'(0) = \left(\vec{\gamma}'(0), \vec{\rho}'(0)\right).$$

Por otro lado, tenemos

$$\beta(t) = \psi\Big(\alpha(t)\Big) = \left(\phi\Big(\gamma(t)\Big), d_{\gamma(t)}\phi\left(\overrightarrow{\rho}(t)\right)\right) = \left(\phi\Big(\gamma(t)\Big), \delta\Big(\gamma(t)\Big)\left(\overrightarrow{\rho}(t)\right)\right),$$

donde $x \mapsto \delta(x) = d_x \phi$ se interpreta como una función que toma valores en el espacio de funciones lineales de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n . Derivando esta última relación, se tiene

$$\vec{\beta}'(0) = \left(d_{\gamma(0)}\phi\left(\vec{\gamma}'(0)\right), d_{\gamma(0)}\delta\left(\vec{\gamma}'(0)\right)\left(\vec{\rho}(0)\right) + \delta\left(\gamma(0)\right)\left(\vec{\rho}'(0)\right) \right)$$

Supongamos que $\overrightarrow{\beta}'(0) = 0$. En este caso, la inyectividad de $d_{\gamma(0)}\phi$ nos dá $\overrightarrow{\gamma}'(0) = 0$. Esto mata también el primer término de la suma en el primer coeficiente. Concluímos que

$$d_{\gamma(0)}\phi\left(\overrightarrow{\rho}'(0)\right) = \delta\left(\gamma(0)\right)\left(\overrightarrow{\rho}'(0)\right) = 0,$$

por lo que $\overrightarrow{\rho}'(0) = 0$, de nuevo por la inyectividad de $d_{\gamma(0)}\phi$.

Consideremos la proyección en la segunda coordenada $\pi : TS \to S$, a la que llamaremos la submersión canónica. El lector puede probar como ejercicio que es realmente una submersión. En este punto estamos en condiciones de definir un campo vectorial en una variedad. Un campo vectorial es una función continua $f : S \to TS$ para la cual la composición $\pi \circ f = id_S$ es la identidad en S. Así definido, un campo vectorial se escribe en la forma

$$f(x) = \left(x, \overrightarrow{v}(x)\right),$$

donde $\vec{v}(x)$ es un vector tangente en x. A menudo se escribe simplemente \vec{v} para el campo vectorial, pero no debemos olvidar que \vec{v} no es por sí sola una función, ya que toma valores en un espacio vectorial móvil. Esto no es un problema en el contexto de variedades incrustadas, que hemos adoptado aquí, pero sí lo es en el contexto más abstracto de variedades arbitrarias.

Habiendo definido campos vectoriales podemos extender la teoría de ecuaciones diferenciales autónomas (independientes del tiempo) a variedades diferenciales incrustadas en el espacio euclideo. En este contexto, una ecuación diferencial autónoma toma la forma $\vec{x}'(t) = \vec{v}(x(t))$ y una solución de dicha ecuación es una curva parametrizada que satisface esa identidad. Tales soluciones reciben el nombre de líneas integrales del campo vectorial, y la teoría de ecuaciones diferenciales nos garantizan su existencia en una vecindad de cada punto. En un sistema de coordenadas locales $\phi: D \to U \cap S$, siempre puede escribirse $x(t) = \phi \circ y(t)$, en cuyo caso la regla de la cadena nos garantiza que para cada valor de t se satisface la identidad

$$d_{y(t)}\phi\left(\overrightarrow{y}'(t)\right) = \overrightarrow{x}'(t) = \overrightarrow{v}\left(x(t)\right) = d_{y(t)}\phi\left(\overrightarrow{w}\left(y(t)\right)\right),$$

donde el campo vectorial \overrightarrow{w} se define en D mediante

$$\overrightarrow{w}(y) = (d_y\phi)^{-1} \overrightarrow{v}(\phi(x)).$$

Esto nos permite resolver dichas ecuaciones en términos de las coordenadas locales, y las líneal integrales así obtenidas serán independientes de la carta escogida. Más aún, estas definiciones pueden extenderse al caso de variedades no incrustadas mediante un uso extensivo de la construcción del plano tangente introducida en la sección previa, de un modo cuyos detalles no precisaremos aquí.

Ejercicios

- 1. Probar que el fibrado tangente TC del círculo C es difeomorfo al cilindro $C \times \mathbb{R}$.
- 2. Sea S una variedad, y sea S' una subvariedad (inmersa) compacta. Sea \vec{v} un campo vectorial en S tal que \vec{v} (p) pertenece al espacio tangente de S' para cada punto $p \in S'$. Probar que toda curva integral de \vec{v} con una condición inicial en S' está totalmente contenida en S'. Pruebe con un contraejemplo que la hipótesis de compacidad es necesaria.
- 3. Sea \overrightarrow{V} un campo vectorial diferenciable no nulo al interior de una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$, y sea $\alpha : [a, b] \to D$ una curva, no necesariamente diferenciable, en D. Probar que existen funciones diferenciables $r, \theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisfacen la relación

$$\overrightarrow{V}(\alpha(t)) = r(t) \Big(\cos \theta(t), \sin \theta(t)\Big), \quad \forall t \in [a, b].$$

- 4. En las notaciones del ejercicio anterior. Mostrar que si D es simplemente conexo, es decir, si para cada par de curvas α, β : [a, b] → D tales que α(a) = β(a) y α(b) = β(b) existe una deformación de extremos fijos que lleva α en β, entonces el valor del ángulo de llegada es independiente del camino, es decir si el ángulo se escoje de modo que θ_α(a) = θ_β(a), entonces automáticamente θ_α(b) = θ_β(b). (Sugerencia: Utilizando la continuidad uniforme, mostrar que es posible subdividir el cuadrado en pequeños subcuadrados tales que el ángulo está bien definido en cada uno y mover la curva de a poco). Concluir que existe una función ángulo bien definida en todo el dominio.
- 5. Sea $\alpha(t) = (\cos t \operatorname{sen} t)$ la parametrización usual del círculo. Utilizar el ejercicio anterior para comprobar que un campo vectorial definido al interior del círculo unitario que satisface

$$\vec{V}\left(\alpha(t)\right) = \vec{T}_{\alpha}(t),$$

para cada número real t, debe anularse en algún punto al interior del círculo.

- 6. Se
a ${\cal S}$ una superficie en el espacio que satisface las siguientes condiciones:
 - S tiene un único punto p en el plano XY, y, fuera de una vecindad simplemente conexa U de dicho punto, la superficie se encuentra por encima de un plano $z = \epsilon$.
 - Aparte de *p*, no existe ningún punto de la superficie en la que el plano tangente sea horizontal.
 - No existe un camino descendente en S que converja a un punto que no pertenezca a S.

Probar que S es simplemente conexa. (Sugerencia: Probar que existe un campo vectorial $\overrightarrow{V}(q)$ en S cuya proyección ortogonal al eje vertical sea $-z(q) \ \overrightarrow{e}_3$. Probar que para toda curva cerrada α , las soluciones $\phi(s,t)$ de la ecuación diferencial $\frac{d}{dt} \ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{V}(x(t))$ con las condiciones iniciales $x(0) = \alpha(s)$, para distintos valores de s, define una deformación de α en una curva contenida en U como en la Figura 6.8).



Figura 6.8: contrayendo una curva a una vecindad de un punto.

Metricas riemannianas

Recordemos que el largo de una curva en \mathbb{R}^n está dada por la integral

$$l(\alpha) = \int_{a}^{b} |\vec{\alpha}'(t)| \, dt.$$

En el caso de una curva contenida en una variedad incrustada, el largo del vector $\vec{\alpha}'(t)$ puede calcularse en términos de la parametrización y de una matriz que se calcula en términos de los productos vectoriales de los vectores de la base canónica. Para precisar, consideramos la parametrización

$$\alpha(t) = \phi\Big(x_1(t), \dots, x_m(t)\Big) = \phi\Big(\beta(t)\Big),$$

en la que $\beta(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$. Derivamos esta relación para obtener la expresión

$$\vec{\alpha}'(t) = d_{\beta(t)}\phi\left(\vec{\beta}'(t)\right) = d_{\beta(t)}\phi\left(\sum_{i=1}^m x_i'(t) \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i'(t) \vec{\epsilon}_i,$$

en términos de los vectores imagen $\vec{\epsilon}_i = \vec{\epsilon}_i(t) = d_{\beta(t)}\phi\left(\vec{e}_i\right)$. Con esta representación podemos calcular el largo del vector tangente mediante la fórmula siguiente:

$$\left| \overrightarrow{\alpha}'(t) \right|^2 = \overrightarrow{\alpha}' \cdot \overrightarrow{\alpha}' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x'_i x'_j \left(\overrightarrow{\epsilon}_i \cdot \overrightarrow{\epsilon}_j \right).$$

Por esta razón definimos $g_{i,j} = \vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_j$. Estos son los coeficientes de una matriz llamada la matriz métrica, o a veces también el tensor de Riemann de la variedad. En términos de estos coeficientes, la fórmula para el largo de una curva puede re-escribirse como sigue:

$$l(\alpha) = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x'_{i} x'_{j} g_{i,j}\right)} dt.$$

Los coeficientes $g_{i,j}$ están definidos en cada punto de la variedad y no dependen de la curva en cuestión, sinó sólo del punto, a travez de sus coordenadas $x_i(t)$. Recuérdese que una forma bilineal simétrica definida en un espacio vectorial real V es una función $b: V \times V \to \mathbb{R}$ que es lineal en cada variable. Una forma cuadrática es una función de la forma $q\left(\vec{v}\right) = b\left(\vec{v}, \vec{v}\right)$. La expresión $q_1(x'_1, \ldots, x'_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x'_i x'_j g_{i,j}$ es una forma cuadrática definida en cada espacio vectorial tangente T_PS . Como es costumbre en la teoría de formas cuadráticas, esta tiene una representación matricial del tipo

$$q_1(x'_1,\ldots,x'_m) = \begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}.$$

La matriz $Q_1 = (g_{i,j})_{i,j}$ que aparece en el centro es la matriz de Gramm de la forma, que en este caso se llama matriz métrica. La forma cuadrática q_1 recibe también el nombre de primera forma fundamental de la variedad S. Esta forma es positiva definida, ya que el largo de un vector es siempre positivo. En particular, la forma bilineal asociada es un producto interno y puede ser utilizado para medir ángulos entre vectores y, por lo tanto, también entre las curvas que los definen. Cuando las curvas coordenadas, es decir las curvas de la forma $\alpha_i(t) = \phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, a_n)$, son ortogonales entre ellas, es decir cuando la matriz Q_I es diagonal, las coordenadas se dicen ortogonales.

Consideremos un segundo mapa ρ , el cual tiene asociada una segunda base canónica, en la que la antigua toma la forma $\vec{\varepsilon}_i = \sum_{j=0}^m \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \vec{\zeta}_j$, como en la ecuación (6.1). Este mapa tiene a su vez asociada una segunda matriz métrica $(\tilde{g}_{i,j})_{i,j}$ que se relaciona con la primera como ilustra el cálculo siguiente:

$$g_{i,j} = \stackrel{\rightarrow}{\varepsilon}_i \cdot \stackrel{\rightarrow}{\varepsilon}_j = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial h_l}{\partial x_j} \left(\stackrel{\rightarrow}{\zeta}_k \cdot \stackrel{\rightarrow}{\zeta}_l \right) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial h_l}{\partial x_j} \tilde{g}_{k,l}.$$
(6.2)

Dada cualquier variedad S, esté o no incrustada en \mathbb{R}^n , es posible forzar una métrica riemanniana símplemente asociando una familia de matrices de Gramm positivas definidas que sean coherentes en el sentido de que satisfagan la ecuación (6.2). Una métrica g de este tipo recibe el nombre de métrica riemanniana abstracta y el par (S, g) recibe el nombre de variedad riemanniana abstracta.

Un difeomorfismo local entre dos variedades $\phi:S\to S'$ se dice una isometría local si se cumple la identidad

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = d_p \phi\left(\vec{v}\right) \cdot d_p \phi\left(\vec{w}\right), \qquad (6.3)$$

para cada par de vectores tangentes $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$ en cualquier punto $p \in S$. Las isometría locales preservan el largo de las curvas, en el sentido de que cualquier curva tiene el mismo largo que su imagen. Las isometrías locales jugarán un rol importante en nuestro estudio de la geometría de las superficies en el próximo capítulo. Una isometría local biyectiva se dice simplemente una isometría. Isometrías locales pueden definirse también entre variedades riemannianas abstractas. En este sentido, cada vez que se define una tal variedad, es posible plantear el problema, a menudo dificil, de determinar si tal variedad es isométrica a una variedad incrustada en un espacio euclideo dado. Si S' es una variedad riemanniana y S es una

variedad arbitraria, la ecuación 6.3 puede utilizarse para definir una métrica en S llamada la métrica pre-imágen, comunmente denotada por ϕ^*g . Si ϕ es un difeomorfismo, puede definirse también una métrica imagen ϕ_*g de manera análoga.

Ejercicios

- 1. Calcule el tensor de Riemann (la matriz métrica) para parametrizaciones de la esfera y el cilindro.
- 2. Calcule el tensor de Riemann para el espacio, en las coordenadas usuales, las coordenadas cilindricas y las coordenadas esféricas.
- 3. Calcule el tensor de Riemann para el plano en coordenadas polares y utilicelas para calcular el largo del círculo unitario y el segmento de recta que une los puntos (1,0) y (0,1).
- 4. El plano hiperbólico se define como el semiplano superior $\{(x, y)|y > 0\}$ con el tensor de Riemann dado por

$$G = \frac{1}{y^2} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Calcule el largo del segmento que une (0,1) con (2,1) y del arco de círculo con centro (1,0) que los une.

5. Sean $p \neq q$ dos puntos de la esfera ubicados en un mismo meridiano. Probar que el meridiano es el camino más corto entre $p \neq q$. Puede utilizar este resultado para encontrar el camino más corto entre dos puntos cualesquiera de la esfera? (recuerde que se tiene libertad para escoger el sistema de coordenadas).

Capítulo 7

Superficies en el espacio

Propiedades elementales

En este capítulo especializaremos lo que se ha hecho hasta aquí al caso de variedades bidimensionales, es decir superficies. Específicamente, denotaremos por S una superficie incrustada en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Consideramos el rango $W \subseteq S$ de un mapa ϕ , y denotamos un punto de W como $P = \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. En ocasiones, por consistencia notacional, utilizaremos el vector posición \vec{x} (u, v) que satisface $\phi(u, v) = O + \vec{x}$ (u, v), donde O es el origen de coordenadas. La derivada de la parametrización es, por lo tanto, la transformación lineal correspondiente a la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{array}\right)$$

Los vectores columna de esta matriz se denotan $\vec{x}_u \ y \ \vec{x}_v$, a fin de ayudarnos a recordar cual corresponde a cual variable. Estos son los generadores del espacio tangente $T_P S \subseteq \mathbb{R}^3$. De este modo, una curva dada por $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$ tiene el vector tangente

$$\vec{\alpha}'(t) = u' \vec{x}_u + v' \vec{x}_v,$$

de acuerdo a la regla de la cadena. El vector normal a la superficie en el punto ${\cal P}$ se define por

$$\vec{n}(P) = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}.$$



Figura 7.1: El plano tangente y el vector normal.

La matriz métrica (o tensor de Riemann) es la matriz de 2 por 2 definida mediante $Q_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, donde $E = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{r} = E = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{r} = C \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}$

$$E = x_u \cdot x_u, \quad F = x_u \cdot x_v, \quad G \; x_v \cdot x_v.$$

La correspondiente forma cuadrática $q_1(x, y) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ recibe el nombre de primera forma fundamental de la superficie, y es una matriz positiva definida, lo que en dimensión 2 significa E > 0 y $EG - F^2 > 0$. Dos curvas se dicen ortogonales si sus vectores tangentes en el punto de encuentro son ortogonales. Se sigue que las curvas u = cte y v = cte sonortogonales si y sólo si F = 0. Si este es el caso, diremos que el sistema de coordenadas es ortogonal.

Recordemos que el largo del vector $\overrightarrow{x}_u \times \overrightarrow{x}_v$ se calcula mediante la fórmula

$$|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = |\vec{x}_u| |\vec{x}_v| \operatorname{sen} \gamma,$$

donde γ es el angulo que subtienden. Se sigue que

$$|\vec{x}_{u} \times \vec{x}_{v}|^{2} = |\vec{x}_{u}|^{2} |\vec{x}_{v}|^{2} - |\vec{x}_{u}|^{2} |\vec{x}_{v}|^{2} \cos^{2} \gamma$$
$$= |\vec{x}_{u}|^{2} |\vec{x}_{v}|^{2} - (\vec{x}_{u} \cdot \vec{x}_{v})^{2} = EG - F^{2}.$$

Si recordamos que el área de una superficie está definida mediante la fórmula $A(S) = \int_{S} |\vec{x}_{u} \times \vec{x}_{v}| du dv$, obtenemos la identidad siguiente:

$$A(S) = \int_{S} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \int_{S} \sqrt{\det Q_1} \, du \, dv.$$

Ejercicios

1. Describa la superficie parametrizada por

 $x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \cosh u \sin v, \quad z = \operatorname{senh} u,$

 $\operatorname{con} u \in \mathbb{R} \neq 0 < v < 2\pi.$

- 2. Suponga que el conjunto de soluciones de la ecuación F(x, y, z) = 0 en una vecindad de la solución $P = (x_0, y_0, z_0)$ es una superficie parametrizada regular S, y que F tiene un gradiente $\overrightarrow{V} \neq 0$ en ese punto. Probar, usando la definición del plano tangente $T_{\overrightarrow{P}}S$, que este tiene ecuación $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{X} = 0$.
- 3. Una superficie S está descrita por un mapa $\phi : C \xrightarrow{\cong} S$ donde C es el interior del cuadrado con vértices en $(\pm 1, \pm 1)$ y la primera forma fundamental en el punto $P = \phi(u, v)$ es

$$\left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 4u^2 & 2uv \\ 2uv & 2v^2 \end{array}\right).$$

Calcule el área de S.

4. Se
a $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ una curva con tangente unitaria $T=\alpha'.$ Se
aSla superficie parametrizada por

$$\vec{x}(u,v) = \alpha(u) + vT(u).$$

Esta superficie se conoce como la desarrollable tangencial de la curva α . Calcule la primera forma fundamental de S.

5. El plano hiperbólico es una superficie que tiene un mapa definido en el semiplano superior, con respecto al cual la primera forma fundamental tiene la matriz métrica siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \frac{1}{y^2} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Calcule el área de la región del plano hiperbólico mapeada por la parte del semiplano que se encuentra por encima del círculo unitario y entre las rectas de acuación $x = \pm 1$ (Ver Figura 6.2).


Figura 7.2: Una región en el plano hiperbólico.

- 6. Probar que la curva mas corta, en el plano hiperbólico, que vá del punto \vec{x} (0,1), de coordenadas y = 1, x = 0, y un punto de la forma \vec{x} (0, h) es la imagen del segmento que une (0, 1) con (0, h). Calcule el largo de dicha curva.
- 7. En las notaciones de los problemas precedentes, probar que la imágen de la porción del círculo unitario que une $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ es más corta que la imagen del segmento de recta que une dichos puntos.
- 8. Probar que si la primera forma fundamental es

$$\left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & G \end{array}\right),$$

las curvas paramétricas u = cte determinan segmentos iguales sobre las curvas v = cte.

Curvatura normal e indicatriz de Dupin

Estudiaremos ahora la curvatura de una curva α contenida en la superficie S. Recordemos que el vector curvatura es la derivada del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco, es decir

$$\vec{k}_{\alpha} = \frac{d \vec{T}_{\alpha}}{ds} = k_{\alpha} \vec{N}_{\alpha} \; .$$

Utilizando la descomposición ortogonal de \mathbb{R}^3 determinada por el vector normal a la superficie en un punto dado, es decir la descomposición ortogonal $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \ \vec{n}(P) \perp T_P S$, podemos escribir $\vec{k}_{\alpha} = \vec{k}_n + \vec{k}_g$, donde $\vec{k}_n = k_n \vec{n}$ y $\vec{k}_g \in T_P S$. Llamaremos a \vec{k}_n el vector curvatura normal y a \vec{k}_g el vector curvatura geodésica de la curva. Veremos que estos dos vectores tienen propiedades bastante distintas en términos de la superficie. El número k_n se denomina curvatura normal (escalar) de la curva.



Figura 7.3: La curvatura normal y la geodésica.

Supongamos que la curva está parametrizada por longitud de arco. Entonces la curvatura normal es el producto interno $\vec{T}' \cdot \vec{n}$ donde \vec{T} es la tangente a la curva. Derivando la relación $\vec{T} \cdot \vec{n} = 0$, obtenemos $\vec{T}' \cdot \vec{n}$ $+ \vec{T} \cdot \vec{n}' = 0$, de donde concluímos que $k_n = -T \cdot \vec{n}'$. Aquí \vec{n} debe interpretarse como una función del parámetro longitud de arco mediante la ecuación $\vec{n} (s) = \vec{n} (\alpha(s))$. La regla de la cadena nos dá entonces $\vec{n}' = u' \vec{n}_u + v' \vec{n}_v$, donde \vec{n}_u es la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial u} \vec{n}$, y \vec{n}_v se define del mismo modo. De este cálculo obtenemos la fórmula

$$k_n = (u')^2 (\vec{x}_u \cdot \vec{n}_u) + (u')(v') (\vec{x}_u \cdot \vec{n}_v + \vec{x}_v \cdot \vec{n}_u) + (v')^2 (\vec{x}_v \cdot \vec{n}_v).$$

Notemos que, al igual que la longitud de arco, la curvatura normal tiene una expresión del tipo $k_n = q_2(u', v')$, donde los coeficientes de la forma $q_2(x, y) = ex^2 + 2fxy + gy^2$ se definen como sigue:

$$e = \overrightarrow{x}_u \cdot \overrightarrow{n}_u, \quad 2f = \overrightarrow{x}_u \cdot \overrightarrow{n}_v + \overrightarrow{x}_v \cdot \overrightarrow{n}_u, \quad g = \overrightarrow{x}_v \cdot \overrightarrow{n}_v$$

En particular, la curvatura normal depende sólo del vector tangente a la curva en un punto dado, no de la segunda derivada. Se interpreta como la parte de la curvatura que es producto de la curvatura intrínseca de la superficie. Este no es, como se expone en el capítulo siguiente, el caso de la curvatura geodésica. La forma q_2 se denomina "segunda fórma fundamental de la superficie".

Proposición 7.1. Los coeficientes de la segunda forma fundamental se pueden definir alternativamente mediante las fórmulas siguientes:

$$e = -\vec{x}_{uu} \cdot \vec{n}, \quad f = -\vec{x}_{uv} \cdot \vec{n} = -\vec{x}_{vu} \cdot \vec{n}, \quad g = -\vec{x}_{vv} \cdot \vec{n}$$

Demostración Nótese que \vec{x}_u y \vec{x}_v son ortogonales a \vec{n} . De hecho, derivando la ecuación $\vec{x}_v \cdot \vec{n} = 0$ con respecto a u se tiene la identidad $\vec{x}_{vu} \cdot \vec{n} + \vec{x}_v \cdot \vec{n}_u = 0$, de donde $\vec{x}_{vu} \cdot \vec{n} = -\vec{x}_v \cdot \vec{n}_u$. La relación $\vec{x}_{vu} \cdot \vec{n} = -\vec{x}_v \cdot \vec{n}_u$, se demuestra analogamente. Sumando estas dos identidades se tiene

$$\vec{x}_{vu} \cdot \vec{n} + \vec{x}_{uv} \cdot \vec{n} = -\vec{x}_v \cdot \vec{n}_u - \vec{x}_u \cdot \vec{n}_v = -2f.$$

Como $\overrightarrow{x}_{vu} = \overrightarrow{x}_{uv}$ para una función de tipo \mathcal{C}^2 , cada uno de los sumandos es igual a -f. Las identidades restantes se prueban del mismo modo, pero sin el paso final.

Nótese que en la demostración anterior se probó tambien la relación \vec{x}_v $\vec{n}_u = \vec{x}_u \cdot \vec{n}_v = f$. Dejamos los detalles al lector. La matriz de Gramm $Q_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ correspondiente a la segunda forma fundamental es simetrica, pero no necesariamente positiva definida. La curva cónica $q_2(x,y) = 1$ recibe el nombre de indicatriz de Dupin de la superficie en el punto P, y puede ser el vacío, una elipse, una recta doble o una hipérbola, dependiendo de la signatura de la segunda forma fundamental. Esta cónica puede usarse



Figura 7.4: La indicatriz de Dupin.

para aproximar la intersección de la superficie con un plano que se obtiene desplazando levemente el plano tangente, en el sentido siguiente:

Definition 7.2. Dos conjuntos Γ y Γ' se encuentran a distancia de Hausdorff d_H si d_H es el mayor número real tal que todo punto de Γ está a distancia menor o igual a d_H del conjunto Γ' y lo mismo vale si permutamos Γ con Γ' .

Proposición 7.3. Asuma que la forma q_2 es no nula. La indicatriz de Dupin es el límite, para $\epsilon \to 0+$, de una renormalización de la intersección de la superficie con un plano de la forma $T_PS - \epsilon \overrightarrow{n}_P$, en toda región acotada.

Demostración Primero describiremos la intersección de la superficie con el plano como el conjunto de ceros de una función que es muy similar a la forma q_2 . Esto es sencillo de hacer. Luego justificaremos el hecho de que ecuaciones "parecidas" tienen un conjunto de soluciones cercanos en la metrica de Hausdorff. Esto concluirá la demostración.

Para cubrir el primer objetivo, consideramos la ecuación del plano tangente desplazado $\Sigma_{\epsilon} = T_P S + \epsilon \ \vec{n}_P$ del enunciado. Este tiene la ecuación intrínseca $(\vec{y} - P) \cdot \vec{n}_P = \epsilon$, donde $P = \phi(u, v)$ es un punto del plano bajo nuestra parametrización. Como es usual consideramos a ϵ tan pequeño como sea necesario. Un punto $\phi(u+\delta, v+\eta)$ de la superficie cercano a P pertenece al plano Σ_{ϵ} si y sólo si su diferencia con P, que como recordarán debe interpretarse como un vector en \mathbb{R}^3 , satisface la relación siguiente:

$$\left(\phi(u+\delta,v+\eta)-P\right)\cdot \overrightarrow{n}=\epsilon.$$

Expandiendo la primera función de la izquierda en serie de Taylor, y utilizando la conocida cota $\delta^i \eta^j \leq \left(\max\{\delta,\eta\}\right)^{i+j} \leq (\delta^2 + \eta^2)^{(i+j)/2}$, obtenemos la relación siguiente:

$$\left(\delta \overrightarrow{x}_u + \eta \overrightarrow{x}_v + \delta^2 \overrightarrow{x}_{uu} + 2\eta \delta \overrightarrow{x}_{uv} + \eta^2 \overrightarrow{x}_{vv} + O\left((\eta^2 + \delta^2)^{3/2}\right)\right) \cdot \overrightarrow{n} = \epsilon.$$

Obsérvese que los vectores \vec{x}_u y \vec{x}_v son ortogonales a \vec{n} , lo que puede utilizarse para simplificar la expresión precedente, de modo que la renormalización dada por $w = \delta/\sqrt{-\epsilon}$ y $z = \eta/\sqrt{-\epsilon}$ nos dá una ecuación de la forma siguiente:

$$q_2(w,z) + \zeta_{\epsilon}(w,z) = 1,$$
 (7.1)

donde ζ_{ϵ} es una función de dos variables que converge a 0 uniformemente en todo conjunto acotado cuando $\epsilon \to 0+$. Supongamos primero que la indicatriz de Dupin es una elipse. Si suponemos que $|\zeta_{\epsilon}(w, z)| < \nu$ en una bola grande alrrededor de 0, las soluciones de (7.1) deben estar contenidas en la banda $1-\nu < q_2(w, z) < 1+\nu$ la cual tiene la forma ilustrada en la Figura 7.5. Más aún, la función $q_2(w, z) + \zeta_{\epsilon}(w, z)$ puede tomar sólo valores menores a 1 en la región interior I y sólo valores mayores a 1 en la región exterior E, excepto quizás fuera de un conjunto acotado grande. Debemos concluir que el conjunto solución de (7.1) debe necesariamente separar ambas regiones, por lo que ninguna lonja transversal de esta banda puede carecer de puntos de dicho conjunto solución. El resultado sigue.



Figura 7.5: Aproximando un conjunto solución.

Si la indicatriz de Dupin es una hipérbola, el argumento es similar, salvo que debe considerarse la intersección de cada región con un conjunto acotado grande, lo mismo sucede en el caso de dos rectas. En el caso en el que la indicatriz es vacía, $q_2(x, y)$ es siempre negativa, por lo que la ecuación (7.1) carecerá de soluciones.

Suele llamarse punto elíptico de una superficie a aquel cuya indicatriz de Dupin es una elipse y punto hiperbólico aquel cuya indicatriz es una hipérbola.

Ejercicios

- 1. Probar que toda recta contenida en una superficie tiene curvatura normal nula. Que puede decirse de la curvatura geodésica?
- 2. Calcule la segunda forma fundamental para el cilindro y la esfera.
- 3. Pruebe que, si una superficie con $q_2 \neq 0$ se encuentra totalmente contenida en uno de los semiespacios determinados por su plano tangente, entoces su indicatriz de Dupin es una elipse o un par de rectas paralelas.

- 4. Sea S una superficie, sea P un punto en S y sea Σ un plano que pasa por P. Probar que, si S está totalmente contenida en uno de los semiespacios determinados por Σ , entonces Σ es el plano tangente a la superficie en P.
- 5. Sea S una superficie compacta en el espacio tridimensional. Probar que S tiene al menos un punto no hiperbólico.

Cambios de coordenadas para formas cuadráticas

En lo que sigue necesitamos algunas herramientas algebraicas de la teoría de formas cuadráticas, por lo que la presente sección será un breve repaso de la misma. Nos limitaremos al caso bidimensional, pero todo lo que se dice en esta sección se generaliza a formas cuadráticas de cualquier rango y a variedades n-dimensionales.

Supongamos que un espacio vectorial V tiene dos bases B_1 y B_2 . En este caso, se tiene una matriz de cambio de base

$$M = M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} \\ d_{2,1} & d_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Las columnas de esta matriz de cambio de base corresponden a los vectores de la segunda base escritos en términos de la primera base. En este caso, si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es la primera base y $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ es la segunda, para todo vector $\vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 = \gamma \vec{f}_1 + \delta \vec{f}_2$, se tiene la relación matricial

$$\left(\begin{array}{c} \alpha\\ \beta\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} d_{1,1} & d_{1,2}\\ d_{2,1} & d_{2,2}\end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \gamma\\ \delta\end{array}\right).$$

A menudo se escribe esta relación utilizando la notación mnemotécnica $\vec{v}_{B_1} = M_{B_1}^{B_2} \vec{v}_{B_2}$, donde el subindice inferior recuerda en que base se escribe cada vector columna o columna de matriz. Uno puede mejorar aún más esta regla utilizando las *filas de vectores* $\Omega^{B_1} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)$ y $\Omega^{B_2} = (\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2)$, para escribir la definición de la matriz de cambio de base mediante $\Omega^{B_2} = \Omega^{B_1} M_{B_1}^{B_2}$. Nótese que podemos identificar el vector \vec{v} con el producto $\Omega^{B_2} \cdot \vec{v}_{B_2} = \Omega^{B_1} \cdot \vec{v}_{B_1}$. Estas convenciones permiten recordar fácilmente el orden de las matrices de cambio de base y se utilizarán en todo lo que sigue.

Consideremos ahora una forma cuadrática $q: V \to \mathbb{R}$ y su forma bilineal simétrica asociada $b: V \times V \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula de polarización:

$$2b\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right) = q\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right) - q\left(\overrightarrow{v}\right) - q\left(\overrightarrow{w}\right).$$

Esta forma bilineal puede escribirse, en términos de una base dada, mediante matriz de Gramm Q^{B_1,B_1} , la que, con las convenciones anteriores, podemos definir, utilizando la notación alternativa $\vec{v} * \vec{w} = b\left(\vec{v}, \vec{w}\right)$, por

$$Q^{B_1,B_1} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 * \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_1 * \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{e}_2 * \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 * \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{e}_2 * \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 * \overrightarrow{e}_2 \end{pmatrix} = (\Omega^{B_1})^t * \Omega^{B_1}$$

donde el exponente t denota trasposición. Con esta convención, la matriz de Gramm en una segunda base está dada por

$$Q^{B_2,B_2} = (\Omega^{B_2})^t * \Omega^{B_2} = (\Omega^{B_1} M_{B_1}^{B_2})^t * \Omega^{B_1} M_{B_1}^{B_2} = (M_{B_1}^{B_2})^t Q^{B_1,B_1} M_{B_1}^{B_2}.$$

Este cálculo nos dá una nueva demostración de la fórmula de cambio de coordenadas para la métrica que se deduce en el capítulo anterior utilizando vectores. Una forma cuadrática es, en las notaciones del capítulo 9, un primer ejemplo de tensor, de hecho puede definirse como un tensor dos veces contravariante.

Una forma cuadrática positiva definida es aquella que sólo toma valores positivos en vectores no nulos. La forma bilineal simétrica asociada a una forma cuadrática positiva definida recibe el nombre de producto interno. Todo producto interno tiene una base ortonormal, obtenida mediante el proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt. Lo que significa que para toda matriz positiva definida Q existe una matriz de cambio de base M que satisface

$$M^t Q M = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Volvamos ahora al contexto de geometría diferencial. Si se reparametriza una superficie mediante un cambio de parámetros u = u(s,t), v = v(s,t), la base asociada $B_2 = {\vec{x}_s, \vec{x}_t}$ se expresa en términos de la antigua mediante las relaciones siguientes (ver Capítulo 5):

$$\vec{x}_s = \frac{\partial u}{\partial s} \vec{x}_u + \frac{\partial v}{\partial s} \vec{x}_v, \quad \vec{x}_t = \frac{\partial u}{\partial t} \vec{x}_u + \frac{\partial v}{\partial t} \vec{x}_v.$$

El álgebra lineal expresa esta relación mediante una matriz de cambio de base:

$$M = M_{B_1}^{B_2} = \left(\begin{array}{cc} \partial u/\partial s & \partial u/\partial t \\ \partial v/\partial s & \partial v/\partial t \end{array}\right).$$

Esta matriz puede ajustarse para tomar un valor arbitrario en un punto dado, de hecho si u = as + bt y v = cs + dt, entonces

$$\left(\begin{array}{cc} \partial u/\partial s & \partial u/\partial t \\ \partial v/\partial s & \partial v/\partial t \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right).$$

De aquí se deduce fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 7.4. Para toda superficie S y todo punto $P \in S$ existe un sistema de coordenadas en el cual la matriz métrica en P es la identidad.

Nótese, sin embargo que la existencia de un sistema de coordenadas en el cual la matriz métrica sea la identidad en una vecindad abierta de P es equivalente a la existencia de una isometría entre dicha vecindad y un abierto de \mathbb{R}^2 . Veremos en el próximo capítulo que dicha isometría no siempre existe.

Los valores propios de una matriz T son, por definición las raices del polinomio $C_T(X) = \det(T - XI)$, donde I es la matriz identidad. En otras palabras, λ es un valor propio si existe un vector columna no nulo que satisface $T \ \vec{v} = \lambda \ \vec{v}$. Tal vector columna se denomina un vector propio. Los vectores de la base canónica son vectores propios si y sólo si la matriz es diagonal. La idea de valor propio está asociado a la idea de matriz como representación de una función lineal f, en términos de una base B_1 . En este caso escribimos $T = [f]_{B_1}^{B_1}$. De hecho, la matriz correspondiente a una transformación lineal se obtiene escribiendo, en las columnas de la matriz, las imágenes de los vectores de la base canónica. En las notaciones anteriores

$$\left(f\left(\overrightarrow{e}_{1}\right) f\left(\overrightarrow{e}_{2}\right)\right) = \left(\overrightarrow{e}_{1} \overrightarrow{e}_{2}\right)T.$$

Lo que podemos resumir como $\Omega^{f(B_1)} = \Omega^{B_1}[f]_{B_1}^{B_1}$, lo que es un leve abuso de notación ya que los vectores en la fila $\Omega^{f(B_1)}$ no siempre forman una base, pero la notación se generaliza sin problemas a pares de vectores. Si consideramos una segunda base B_2 podemos escribir

$$\Omega^{B_1}[f]_{B_1}^{B_1} = \Omega^{f(B_1)} = \Omega^{f(B_2)} M_{B_2}^{B_1} = \Omega^{B_2}[f]_{B_2}^{B_2} M_{B_2}^{B_1}$$
$$= \Omega^{B_1} \left(M_{B_2}^{B_1} \right)^{-1} [f]_{B_2}^{B_2} M_{B_2}^{B_1},$$

donde la segunda igualdad es simplemente la linealidad de f aplicada por cordenada (sugerimos al lector escribir cada lado en detalle). Esto nos dá

la conocida fórmula de cambio de variables para la matriz de una transformación lineal.

$$[f]_{B_1}^{B_1} = \left(M_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} [f]_{B_2}^{B_2} M_{B_2}^{B_1}.$$

Es importante no confundir esta fórmula con la de cambio de variables en la matriz de Gramm de una forma cuadrática, dado que necesitamos deducir una fórmula que las involucra a ambas. De hecho, utilizaremos el siguiente resultado bien conocido del álgebra lineal:

Una matriz simétrica S, en un espacio vectorial real, tiene una base ortogonal (con respecto al producto punto usual) de vectores propios.

Dividiendo cada vector de la base por su largo, podemos asumir que esta base es ortonormal, por lo que la matriz de cambio de base no modifica el producto punto. Como el producto punto tiene a la identidad como matriz de Gramm, la matriz de cambio de base satisface $M^t M = I$. El hecho de que sea una base de vectores propios nos dice que $M^{-1}SM$ es una matriz diagonal, con los valores propios en la diagonal. Por otro lado, el hecho de que $M^t M = I$ nos dice que $M^t = M^{-1}$, por lo que en este caso particular la fórmula anterior puede interpretarse indistintamente, ya sea como un cambio de variables de una transformación lineal, ya sea como un cambio de variables en una forma cuadrática. Por supuesto, es posible realizar un cambio de base a esta última matriz para que los elementos diagonales estén en el conjunto $\{0, 1, -1\}$, pero esto no es posible con una matriz de cambio de base ortogonal.

El siguiente resultado se deduce inmediatamente de la discusión que precede:

Proposición 7.5. Dadas dos formas cuadráticas $q_1 y q_2$, con q_1 positiva definida, existe una base en la que la matriz de Gramm de q_1 es la identidad, mientras que la matriz de Gramm de q_2 es diagonal.

Si Q_1 y Q_2 son las matrices de Gramm de las dos formas cuadráticas arriba mencionadas, los elementos diagonales son las raices del polinomio $p(X) = \det(XQ_1-Q_2)$. Nótese que estas raices permanecen invariantes bajo cambios de coordenadas, dado que las matrices de cambio de coordenadas tienen determinante no nulo. Estas raices son referidas a veces como valores propios relativos.

Ejercicios

1. Encuentre una base en la que la forma cuadrática con matriz de Gramm

$$Q = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 1 & 4 \end{array}\right)$$

sea ortonormal.

2. Encuentre los valores propios relativos de la matriz simétrica

$$Q = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3\\ 3 & 1 \end{array}\right)$$

con respecto a la matriz positiva definida del ejercicio precedente.

- 3. Para cada punto P en la esfera, encuentre un sistema de coordenadas en los cuales la primera forma fundamental tenga matriz de Gramm $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- 4. Sea Q una matriz simétrica positiva definida. Probar que para toda superficie S y todo punto $P \in S$ existe un sistema de coordenadas en el cual la matriz métrica en P es igual a Q.
- 5. Determine para qué valores del parámetro m existe una superficie S en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto (0,0,0) y cuya primera forma fundamental en ese punto es

$$\left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} m & 1-2m \\ 1-2m & m \end{array}\right).$$

Justifique.

6. Probar que si, una matriz simétrica Q tiene un valor propio positivo y uno negativo, lo mismo es cierto para la matriz M^tQM para toda matriz invertible M.

Líneas asintóticas y de curvatura

Un vector $\vec{v} = a \vec{x}_u + b \vec{x}_v \in T_P S$ que satisface la ecuación $q_2(a, b) = 0$ se denomina una dirección asintótica. Tales direcciones existen si y sólo si la forma q_2 no es definida, es decir, si y sólo si la indicatriz de Dupin es una hipérbola o una cónica degenerada. Cuando la indicatriz es una elipse,



Figura 7.6: Líneas asintóticas (a) y de curvatura (c) cerca de un punto hiperbólico.

no hay direcciones as intóticas. Una curva contenida en una superficie S se dice as intótica si su derivada en cada punto es una dirección as intótica. Las curvas as intóticas se pueden interpretar geométricamente gracias al siguiente resultado:

Proposición 7.6. Una curva contenida en una superficie S es una curva asintótica si y sólo si, en cada punto de la misma, el plano tangente a la superficie coincide con el plano osculador de la curva.

Demostración Se sigue de la definición que una curva es una línea asintótica si y sólo si su curvatura normal es nula en cada punto. En otras palabras, El vector curvatura $\vec{k} = \vec{k}_g$ está contenido en el plano tangente a la superficie. Recuérdese que el plano osculador está generado por la tangente y el vector curvatura $\vec{k} = k \vec{N}$, donde \vec{N} es la normal principal de la curva. Como la tangente a la curva está siempre contenida en el plano tangente, lo anterior equivale a decir que el plano osculador coincide con el plano tangente.

Utilizando los resultados de la sección anterior, es posible encontrar un sistema de coordenadas $\vec{x}(u,v)$, en una vecindad de un punto P, tales que los valores de las matrices que corresponden a la primera y segunda forma fundamental sean, en el punto P mismo, las siguientes:

$$Q_1(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2(P) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Los valores k_1 y k_2 son los valores propios relativos de Q_2 respecto a Q_1 , es decir, las raices de la ecuación

$$\det\left(Q_2(P) - kQ_1(P)\right) = 0.$$
(7.2)

Se conocen normalmente como curvaturas principales de la superficie en el punto P. Los vectores $\vec{x}_u \neq \vec{x}_v$, que conforman la base en la cual las formas fundamentales tienen la forma sencilla ya mencionada, reciben el nombre de direcciones principales de curvatura. Nótese, sin embargo, que las curvaturas principales pueden caracterizarse como las soluciones en k de la ecuación (7.2) en cualquier sistema de coordenadas, y que las direcciones principales de curvatura son los vectores propios relativos correspondientes, es decir las soluciones en \vec{v} de cada una de las ecuaciones lineales

$$Q_2 \overrightarrow{v} = k_1 Q_1 \overrightarrow{v}, \qquad Q_2 \overrightarrow{v} = k_2 Q_1 \overrightarrow{v},$$

normalizados de manera que satisfagan también la condición de ser vectores unitarios, lo que en nuestro caso significa $\overrightarrow{v}^t Q_1 \overrightarrow{v} = 1$. Una curva se denomina una línea de curvatura si su vector tangente en cada punto es una dirección principal de curvatura. Puede eliminarse, en esta definición la condición de que el vector tangente sea unitario, lo que equivale a tomar una reparametrización arbitraria de la curva. Por cada punto de una superficie pasan exactamente dos líneas de curvatura, excepto aquellos puntos en los cuales $k_1 = k_2$, en cuyo caso cada vector del plano tangente es una dirección principal de curvatura. En este caso no existe un sistema de coordenadas preferente (en tanto sea ortonormal en el punto). Los puntos que satisfacen la condición $k_1 = k_2$ se denominan umbílicos.



Figura 7.7: Lineas de curvatura de diversas superficies (fuente: Wikipedia).

La curvatura gaussiana se define como el producto $K = k_1 k_2$ de las curvaturas principales. Nótese que, si M es una matriz de cambio de base

tal que $M^T Q_1 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, las curvaturas principales son los valores propios de la matriz $M^T Q_2 M$. La identidad $M^T Q_1 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ implica

$$\det(M^T Q_1 M) = \det(M^T) \det(Q_1) \det(M) = \det(Q_1) \det(M)^2 = 1.$$

Se concluye que

$$K = \det(M^T Q_2 M) = \det(Q_2) \det(M)^2 = \frac{\det Q_2}{\det Q_1}.$$

Esta última fórmula es válida en cualquier sistema de coordenadas.

Las formas bilineales asociadas a las formas cuadráticas $q_1 \ge q_2$ (y definidas mediante la fórmula de polarización) se calculan en términos de las matrices de Gramm como sigue:

$$b_1\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{v}^t Q_1 \overrightarrow{w}, \qquad b_2\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{v}^t Q_2 \overrightarrow{w}.$$

Cada forma determina una condición de ortogonalidad diferente:

- 1. Dos vectores del espacio tangente se dicen ortogonales si $b_1(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Para el caso de superficies incrustadas en \mathbb{R}^3 , este concepto es consistente con la noción usual de ortogonalidad en el espacio tangente como subespacio de \mathbb{R}^3 , aunque la noción puede definirse en general para cualquier métrica Riemanniana.
- 2. Dos vectores se dicen direcciones conjugadas si satisfacen la relación $b_2(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$

Las direcciones principales de curvatura son ortogonales y conjugadas, pero los dos conceptos rara vez coinciden, excepto en un umbílico. El concepto de direcciones conjugadas tiene otra interpretación geométrica dada por el siguiente resultado:

Proposición 7.7. La posición límite de la intersección de los planos tangentes a la superficie en dos puntos de una curva que se aproximan es la dirección conjugada a la tangente a la curva.

Demostración Sea $\alpha : I \to S$ la curva en cuestión y sean $\alpha(t)$ y $\alpha(t+h)$ dos puntos sobre esa curva. Un vector \vec{v} está en la intersección de los planos tangentes si se cumplen simultáneamente las identidades

$$\vec{n}\left(\alpha(t)\right)\cdot\vec{v}=0,\qquad \vec{n}\left(\alpha(t+h)\right)\cdot\vec{v}=0.$$

En particular, se tiene que

$$\frac{1}{h} \left[\vec{n} \left(\alpha(t+h) \right) - \vec{n} \left(\alpha(t) \right) \right] \cdot \vec{v} = 0.$$

En el límite, obtenemos por lo tanto la relación $(\vec{n} \circ \alpha)'(t) \cdot \vec{v} = 0$. Escribiendo esta derivada simplemente como \vec{n}' , obtenemos, por la regla de la cadena, la expresión $\vec{n}' = u' \vec{n}_u + v' \vec{n}_v$. De aquí se tiene, por la definición de la segunda forma fundamental, la siguientes identidades:

$$\vec{n}' \cdot \vec{x}_u = u'e + v'f, \qquad \vec{n}' \cdot \vec{x}_v = u'f + v'g.$$

Por otro lado, \vec{n}' es ortogonal a \vec{n} , y por lo tanto un vector del plano tangente a la superficie. Si lo escribimos escribimos en términos de la base asociada a la parametrización, es decir $\vec{n}' = \alpha \vec{x}_u + \beta \vec{x}_v$, se tiene, por la definición de la primera forma fundamental, las identidades siguientes:

$$\vec{n}' \cdot \vec{x}_u = \alpha E + \beta F, \qquad \vec{n}' \cdot \vec{x}_v = \alpha F + \beta G$$

Combinando estas cuatro identidades obtenemos la ecuación matricial

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} u' & v' \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} e & f \\ f & g \end{array}\right)$$

La relación $\vec{n}' \cdot \vec{v} = 0$ es equivalente, si $\vec{v} = \gamma \vec{x}_u + \delta \vec{x}_v$, a la identidad matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 0,$$

la que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 0.$$

Esta última dice, en coordenadas locales, simplemente que se tiene la identidad $b_2(\vec{T}, \vec{v}) = 0$ como se afirmó.

Ejercicios

1. Se
a ${\cal S}$ la superficie de revolución

$$\overrightarrow{x}(u,v) = \left(f(u) \operatorname{sen} v, f(u) \cos v, g(u)\right)$$

Probar que las líneas paramétricas u = cte y v = cte son ortogonales.

- 2. Mostrar que, si una curva subtiende un ángulo θ con la dirección principal correspondiente a la curvatura k_1 , entonces su curvatura normal está dada por la fórmula $k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$. Este resultado se conoce como Teorema de Euler.
- 3. Encuentre las curvaturas principales del elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

en el punto (2, 0, 0).

4. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que las líneas asintóticas sean ortogonales es

$$Eg - 2Ff + eG = 0.$$

- 5. Probar que las líneas paramétricas son líneas de curvatura si y sólo si F = f = 0.
- 6. Sea S la superficie de revolución que se obtiene al girar a curva y = f(x) alrededor del eje Y. Probar que los paralelos y los meridianos de S (es decir las curvas $\theta = \text{cte y } r = \text{cte}$) son líneas de curvatura.
- 7. Probar que una desarrollable tangencial tiene curvatura Gaussiana nula y encuentre sus líneas asintóticas y de curvatura.
- 8. Probar la identidad

$$eg - f^2 = [\vec{n} \cdot (\vec{n}_u \times \vec{n}_v)] \sqrt{EG - F^2}$$

y concluir que la curvatura Gaussiana se anula si y sólo si \vec{n}_u y \vec{n}_v son paralelos o si alguno de ellos es nulo.

Capítulo 8

Geometría intrínseca de superficies

El propósito del presente capítulo es estudiar las propiedades de las superficies con una métrica Riemanniana, como objetos abstractos. En otras palabras, nos interesa estudiar las propiedades de una superficie que quedan invariantes bajo difeomorfismos que preservan la primera forma fundamental. Estos son conocidos como isometrías. Como regla general, una propiedad de una superficie, o una magnitud asociada a la misma, se dice invariante (o intrínseca) cuando no se altera al remplazar una superficie por una imagen isométrica. Esta definición puede aplicarse tanto a propiedades locales como globales. Es decir, tenemos propiedades intrínsecas locales, que se preservan bajo isometrías locales, así como propiedades intrínsecas globales, las que sólo se preservan bajo isometrías definidas en toda la superficie y que poseen una inversa global. Ejemplos sencillos de esta última categoría son el largo de una curva o el área de una superficie, ya que estas magnitudes se expresan mediante integrales que dependen sólo de los coeficientes E, Fy G. Ejemplos de la primera son las curvaturas Gaussiana y geodésica que estudiaremos a lo largo de este capítulo.

La curvatura gaussiana y el Theorema Egregium

El primer resultado de este capítulo nos dice que la curvatura gaussiana es, efectivamente, una propiedad intrínseca de una superficie. Este es el llamado *Theorema egregium* (o Teorema destacable en latín) de Gauss:

Proposición 8.1. La curvatura gaussiana $K = k_1k_2$ es invariante bajo isometrías.

Antes de comenzar la demostración, necesitaremos una fórmula para las derivadas del vector normal:

Lema 8.2. Las derivadas parciales del vector normal están dadas por las fórmulas siguientes:

$$\vec{n}_u = \frac{(eG - fF) \vec{x}_u + (fE - Fe) \vec{x}_v}{GE - F^2},$$

$$\vec{n}_v = \frac{(fG - gF) \vec{x}_u + (gE - fF) \vec{x}_v}{GE - F^2}.$$

Demostración Como el vector normal unitario tiene largo constante, sus derivadas son perpendiculares a él, por lo que se encuentran en el plano tangente. Por esta razón podemos utilizar las matrices de vectores $\Omega^X = \left(\vec{x}_u \ \vec{x}_v\right) \text{ y } \Omega^N = \left(\vec{n}_u \ \vec{n}_v\right)$ para escribir, en forma matricial, las definiciones de las matrices de Gramm de las dos formas fundamentales:

$$Q_1 = (\Omega^X)^t \cdot \Omega^X, \qquad Q_2 = (\Omega^N)^t \cdot \Omega^X.$$

Sea A una matriz cuyas columnas corresponden a las derivadas del vector normal en términos de la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$, es decir $\Omega^N = \Omega^X A$. Esta última relación nos permite escribir $A^t Q_1 = Q_2$, o, equivalentemente, $A = Q_1^{-1} Q_2$. El enunciado se obtiene multiplicando explícitamente dichas matrices. \Box

Este resultado será utilizado en forma del corolario de abajo, el que se demuestra mediante un simple cálculo.

Corollary 8.2.1. Si $\vec{n}_u = a \vec{x}_u + c \vec{x}_v \ y \vec{n}_v = b \vec{x}_u + d \vec{x}_v$, entonces se tiene la relación siguiente:

$$fa - eb = \frac{(eg - f^2)F}{EG - F^2} = \frac{\det Q_2}{\det Q_1}F = KF.$$

Demostración del Theorema Egregium. Comencemos por escribir las derivadas de segundo orden en términos de los vectores de la base canónica $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}\}$. El vector normal es perpendicular (por definición) al plano tangente. Por consiguiente, podemos utilizar las relaciones

$$\vec{x}_{uu} \cdot \vec{n} = -e, \quad \vec{x}_{uv} \cdot \vec{n} = -f, \quad \vec{x}_{vv} \cdot \vec{n} = -g,$$

para escribir las siguientes expresiones:

$$\vec{x}_{uu} = \Gamma^u_{uu} \vec{x}_u + \Gamma^v_{uu} \vec{x}_v - e \vec{n},$$

$$\vec{x}_{uv} = \Gamma_{uv}^u \vec{x}_u + \Gamma_{uv}^v \vec{x}_v - f \vec{n} \quad \mathbf{y}$$
$$\vec{x}_{vv} = \Gamma_{vv}^u \vec{x}_u + \Gamma_{vv}^v \vec{x}_v - g \vec{n} .$$

Por simetría, definimos $\Gamma_{uv}^c = \Gamma_{vu}^c$ para $c \in \{u, v\}$. Esta convención es natural, dado que las derivadas parciales conmutan. Precisamente, utilizaremos la identidad $\overrightarrow{x}_{uvu} = \overrightarrow{x}_{uuv}$ para obtener una expresión para la curvatura gaussiana en términos de estos coeficientes. Las expresiones Γ_{ab}^c son conocidas como simbolos de Christoffel, y pueden definirse también para variedades de dimensión superior, como haremos en una sección posterior.

Derivando la expresión para \vec{x}_{uu} con respecto a v se tiene

$$\vec{x}_{uuv} = \Gamma^u_{uu,v} \vec{x}_u + \Gamma^u_{uu} \vec{x}_{uv} + \Gamma^v_{uu,v} \vec{x}_v + \Gamma^v_{uu} \vec{x}_{vv} - e_v \vec{n} - e \vec{n}_v,$$

donde el subindice tras la coma en algunos símbolos de Christoffel denota derivación con respecto a esa variable. Del mismo modo, calculamos

$$\vec{x}_{uvu} = \Gamma^u_{uv,u} \vec{x}_u + \Gamma^u_{uv} \vec{x}_{uu} + \Gamma^v_{uv,u} \vec{x}_v + \Gamma^v_{uv} \vec{x}_{vu} - f_u \vec{n} - f \vec{n}_u.$$

Igualando los coeficientes de \vec{x}_u en cada expresión de arriba, se tiene

$$\Gamma^u_{uu,v} + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - eb = \Gamma^u_{uv,u} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu} - fa$$

donde $a \ge b$ son los coeficientes que aparecen en el corolario precedente. Esto nos dá la siguiente fórmula:

$$-KF = \Gamma^u_{uu,v} + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - \Gamma^u_{uv,u} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu}$$
$$= \Gamma^u_{uu,v} - \Gamma^u_{uv,u} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu}.$$

Asumiendo que $F \neq 0$, lo que siempre puede hacerse en una vecindad de un punto dado escogiendo coordenadas apropiadas, el resultado sigue del Lema 8.3, el que se enuncia a continuación.

Lema 8.3. La simbolos de Christoffel son invariantes intrínsecos de la superficie.

Demostración. Basta expresar los símbolos de Christoffel en términos de la primera forma fundamental. Para esto procedemos como sigue: Derivando la relación $E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u$, obtenemos $E_u = 2 \vec{x}_{uu} \cdot \vec{x}_u$. Usando la expresión para \vec{x}_{uu} en términos de los símbolos de Christoffel, se tiene la fórmula siguiente:

$$E_u = 2 \left(\Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F \right).$$

Procedemos ahora a calcular las restantes derivadas del mismo modo:

$$E_v = 2 \left(\Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F \right),$$

$$G_u = 2 \left(\Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G \right),$$

$$G_v = 2 \left(\Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G \right),$$

$$F_u = \left(\Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G \right) + \left(\Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F \right),$$

$$F_v = \left(\Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{vv}^v G \right) + \left(\Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{vv}^v F \right).$$

Para concluir la demostración basta probar que el sistema precedente puede resolverse para los símbolos de Christoffel. Este es un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que tiene la forma matricial siguiente:

$E_u/2$		E	F	0	0	0	0 \	$\left(\begin{array}{c} \Gamma_{uu}^{u} \end{array} \right)$
F_u	=	F	G	E	F	0	0	Γ^v_{uu}
$E_v/2$		0	0	E	F	0	0	Γ^{u}_{uv}
$G_u/2$		0	0	F	G	0	0	$\Gamma_{uv}^{\bar{v}}$
F_v		0	0	F	G	E	F	$\Gamma_{vv}^{\bar{u}}$
$G_v/2$		\ 0	0	0	0	F	G /	$\left\langle \Gamma_{vv}^{v}\right\rangle$

Un par de operaciones elementales entre filas nos muestran que este sistema tiene el mismo determinante que la matriz

$$\left(\begin{array}{ccccccc} E & F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & G \end{array}\right)$$

el cual es $(EG - F^2)^3$, lo que es no nulo por ser el cubo del determinante de la primera forma fundamental. Esto concluye la demostración del lema y el Theorema Egregium.

Ejemplo 8.4. La esfera tiene a un círculo como indicatriz de Dupin, por lo que su curvatura gaussiana es no nula. Esto implica que un mapa en la esfera nunca puede ser isométrico. Esto tiene importantes aplicaciones a la cartografía ya que un mapa de la superficie terrestre debe, necesariamente, alterar algunas distancias. Esto es particularmente evidente en la llamada Proyección de Mercator (Figura 7.1, a la izquierda), en la cual Groenlandia parece tener el mismo tamaño que Africa. Esto no significa que no puedan construirse mapas que preserven algunas características intrínsecas de la superficie, como las áreas (véase el mapa en el centro de la Figura 7.1), o los ángulos, cómo es el caso de la proyección estereográfica (véase el mapa a la derecha de la Figura 7.1).



Figura 8.1: Algunos mapas de la superficie terrestre (fuente: Wikipedia).

Ejercicios

- 1. Probar que una desarrollable tangencial tiene curvatura gaussiana nula y encuentre sus líneas asintóticas y de curvatura.
- 2. Mostrar que las homotecias, es decir las funciones de la forma $f(z) = az \operatorname{con} a > 0$, son isometrías del plano hiperbólico. Muestre que el grupo de isometrías de esta superficie actúa transitivamente en sus puntos y deduzca que la curvatura gaussiana del plano hiperbólico es constante (nótese, sin embargo, que para tener la interpretación de esta cantidad en términos de curvaturas principales, es necesario incrustar parte de esta superficie en el espacio tridimensional).
- 3. Una superficie parametrizada tiene primera forma fundamental

$$\left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{array}\right).$$

Probar que S es isométrica a una región del plano.

- 4. Sea *S* una superficie con una parametrización $(u, v) \mapsto \vec{x} (u, v)$ cuya primera forma fundamental está dada por $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$. Probar que *S* es localmente isométrica al plano.
- 5. Utilice la parametrización usual de la esfera, es decir

$$\vec{x}$$
 $(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$

para probar que la transformación

$$(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$$

es una isometría de esta superficie.

- 6. Probar que el conjunto $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$ es una superficie localmente isométrica al plano. Es conocida como el toro plano.
- 7. Probar que la proyección ortogonal de la esfera sin polos en un cilindro de igual radio que pasa por su ecuador es una función que preserva áreas pero no es una isometría.
- 8. Sea S una superficie parametrizada regular y sea $f: S \to S^2$ la función que lleva a cada punto de la superficie en su vector normal unitario correspondiente, considerado como un punto de la esfera. Probar que la integral de la curvatura gaussiana sobre una región de la superficie es el área de su imágen bajo f. Sugerencia: Calcule la primera forma fundamental de la esfera cuando se parametriza a través de S.
- 9. Sea S la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva y = f(x) alrededor del eje Y. Probar que la curvatura gaussiana se anula sólo en los círculos que corresponden a los puntos críticos y los puntos de inflexión de f.

Fórmulas generales para los símbolos de Christoffel y su generalización a dimensiones superiores

En esta sección explicitaremos las fórmulas que permiten calcular los símbolos de Christoffel en términos de la métrica. Para ello utilizaremos la notación $g_{ij} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$ introducida en el capítulo 5. En nuestro caso escribimos

$$\left(\begin{array}{cc} E & F \\ F & G \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{array}\right)$$

Las derivadas de todos los coeficientes de la primera forma fundamental pueden ahora resumirse en la fórmula siguiente:

$$g_{ij,k} = \sum_{m \in \{u,v\}} \left(\Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{mi} \right),$$

donde hemos usado la simetría $g_{ij} = g_{ji}$ de la primera forma fundamental, así como su equivalente en los símbolos de Christoffel. Permutando los indices obtenemos dos relaciones adicionales:

$$g_{ik,j} = \sum_{m \in \{u,v\}} \left(\Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{jk}^m g_{mi} \right), \qquad g_{ij,k} = \sum_{m \in \{u,v\}} \left(\Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{mj} \right).$$

Estas tres relaciones pueden sumarse para obtener

$$g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k} = 2 \sum_{m \in \{u,v\}} \Gamma^m_{ij} g_{mk}.$$

Ahora, consideraremos la matriz inversa de la métrica, cuyos coeficientes denotaremos por g^{ij} , es decir

$$\begin{pmatrix} g^{uu} & g^{uv} \\ g^{vu} & g^{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Por definición de inversa, el producto de esta matriz con la matriz métrica es la identidad, lo que a nivel de sumatorias se escribe $\sum_{k \in \{u,v\}} g_{mk}g^{kt} = \delta^m t$, donde el último símbolo es la delta de Kronecker. De aquí obtenemos la fórmula siguiente:

$$\Gamma_{ij}^{t} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \{u,v\}} \left(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k} \right) g^{kt}.$$
(8.1)

Si utilizamos los coeficientes de la matriz inversa mostrados más arriba llegamos a la siguiente lista de fórmulas explicitas:

$$\begin{split} \Gamma_{uu}^{u} &= \frac{GE_{u} - 2FF_{u} + FE_{v}}{2(EG - F^{2})}, \qquad \Gamma_{uu}^{v} = \frac{2EF_{u} - EE_{v} - FE_{u}}{2(EG - F^{2})}, \\ \Gamma_{uv}^{u} &= \frac{GE_{v} - FG_{u}}{2(EG - F^{2})}, \qquad \Gamma_{uv}^{v} = \frac{EG_{u} - FE_{v}}{2(EG - F^{2})}, \\ \Gamma_{vv}^{u} &= \frac{2GF_{v} - GG_{u} - FG_{v}}{2(EG - F^{2})}, \qquad \Gamma_{vv}^{v} = \frac{EG_{v} - 2FF_{v} + FG_{u}}{2(EG - F^{2})}. \end{split}$$

La Ecuación (8.1), sin embargo, nos permite definir los símbolos de Christoffel en contextos mucho más generales, corrigiendo sólamente el conjunto de índices $\{u, v\}$. Estos símbolos de Christoffel generalizados juegan un rol crucial en el estudio de la curvatura geodésica y la noción de transporte paralelo. No estudiaremos estas propiedades en estas notas, sinó en el contexto de superficies, pero su generalización es bastante directa, como el lector comprobará fácilmente.

Ejercicios

1. Calcule los símbolos de Christoffel del plano en coordenadas polares. Utilice este cálculo para dar una nueva demostración de que la curvatura Gaussiana del plano es nula.

- 2. Calcule los símbolos de Christoffel del cilindro, el cono y la esfera, en términos de las coordenadas usuales de esas superficies.
- 3. Calcule los símbolos de Christoffel de una superficie de revolución.
- 4. Calcule los símbolos de Christoffel del plano hiperbólico.
- 5. Probar que si ω es el ángulo formado por las curvas coordenadas se tiene

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = -\frac{D}{E}\Gamma^{v}_{uu} - \frac{D}{G}\Gamma^{u}_{uv}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v} = -\frac{D}{E}\Gamma^{v}_{uv} - \frac{D}{G}\Gamma^{u}_{vv}$$

donde $D = \sqrt{EG - F^2}$.

La curvatura geodésica

Recuerdese que la curvatura de una curva en una superficie S se descompone en la curvatura normal y geodésica de acuerdo a la formula

$$\vec{k} = k \vec{N} = \vec{k}_n + \vec{k}_g = k_n \vec{n} + k_g \vec{U}$$

donde \overrightarrow{n} es el vector normal a la superficie y \overrightarrow{U} es un vector unitario contenido en el plano tangente. Probaremos que la curvatura geodésica de una curva dada es una propiedad intrínseca de la superficie. En otras palabras, la curvatura geodésica de una curva contenida en S es igual, en puntos correspondientes, a la curvatura geodésica de su imagen bajo cualquier isometría. Para ello escribiremos la curvatura geodésica en términos de los símbolos de Christoffel, los cuales ya sabemos invariantes.

Proposición 8.5. La curvatura geodésica de una curva $\alpha(t) = \vec{x} \left(u(t), v(t) \right)$ depende sólo de los coeficientes de la primera forma fundamental en el punto $\alpha(t)$ y de las derivadas de las funciones u(t) y v(t).

Demostración. Por definición, la curvatura geodésica es el largo de la proyección del vector curvatura en el espacio generado por un vector unitario \vec{U} que es ortogonal, tanto al vector tangente \vec{T} de la curva, como al vector normal \vec{n} de la superficie. Otra manera de decir lo mismo, es decir que se tiene una base ortonormal $\{\vec{T}, \vec{n}, \vec{U}\}$, con $\vec{U} = \pm \vec{n} \times \vec{T}$, donde el signo se escoge de modo que el producto escalar

$$k_g = \overrightarrow{U} \cdot k \overrightarrow{N} = \overrightarrow{U} \cdot \frac{d \overrightarrow{T}}{ds} = \pm \left(\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{T}\right) \cdot \overrightarrow{T}' = \pm \left(\overrightarrow{T} \times \overrightarrow{T}'\right) \cdot \overrightarrow{n}$$

sea positivo. Nótese que las primas, en el cálculo precedente, denotan derivación con respecto a la longitud de arco. Adoptaremos esa convención en todo lo que sigue. Utilizando las identidades $\vec{T} = u' \vec{x}_u + v' \vec{x}_v$ y

$$\vec{T} = u'' \vec{x}_u + v'' \vec{x}_v + (u')^2 \vec{x}_{uu} + 2u'v' \vec{x}_{uv} + (v')^2 \vec{x}_{vv},$$

se obtiene finalmente

$$\pm k_g = \left[\left(\vec{x}_u \times \vec{x}_{uu} \right) \cdot \vec{n} \right] (u')^3 + \left[\left(2 \vec{x}_u \times \vec{x}_{uv} + \vec{x}_v \times \vec{x}_{uu} \right) \cdot \vec{n} \right] (u')^2 v' \\ + \left[\left(\vec{x}_u \times \vec{x}_{vv} + 2 \vec{x}_v \times \vec{x}_{uv} \right) \cdot \vec{n} \right] u'(v')^2 + \left[\left(\vec{x}_v \times \vec{x}_{vv} \right) \cdot \vec{n} \right] (v')^3 \right] \\ + (u'v'' - u''v') (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \cdot \vec{n} .$$

Observemos ahora que, por definición, las segundas derivadas de la parametrización se escriben como sigue:

$$\overrightarrow{x}_{ab} = -h_{ab} \ \overrightarrow{n} + \sum_{c \in \{u,v\}} \Gamma^c_{ab} \ \overrightarrow{x}_c,$$

donde h_{ab} es el coeficiente que corresponde en la segunda forma fundamental. Remplazando esta expresión en un producto escalar triple como los que aparecen en el cálculo precedente, ivolucrando a una primera derivada \vec{x}_d , sólo sobrevive el coeficiente de la sumatoria que satisface $c \neq d$, por lo que se tiene

$$\left[\left(\vec{x}_d \times \vec{x}_{ab} \right) \cdot \vec{n} \right] = \pm \Gamma^c_{ab} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \cdot \vec{n} = \pm \Gamma^c_{ab} \sqrt{EG - F^2}.$$

El signo de arriba es positivo si y sólo si d = u. Esto nos dá la fórmula siguiente:

$$\frac{\pm k_g}{\sqrt{EG - F^2}} = \Gamma_{uu}^v (u')^3 + (2\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u)(u')^2 v' + (\Gamma_{vv}^v - 2\Gamma_{uv}^u)u'(v')^2 - \Gamma_{vv}^u (v')^3 + (u'v'' - u''v').$$

Las curvas con curvatura geodésica nula reciben el nombre de geodésicas. Se sigue de la fórmula precedente que las geodésicas son las soluciones de la ecuación diferencial siguiente:

$$\Gamma_{uu}^{v}(u')^{3} + (2\Gamma_{uv}^{v} - \Gamma_{uu}^{u})(u')^{2}v' + (\Gamma_{vv}^{v} - 2\Gamma_{uv}^{u})u'(v')^{2} - \Gamma_{vv}^{u}(v')^{3} + (u'v'' - u''v') = 0.$$
(8.2)

En principio, esta ecuación debe ser satisfecha por las derivadas de $u \ge v$ con respecto a la longitud de arco, pero, en realidad, las derivadas con respecto

a otro parámetro t también la satisfacen. Para probar esto se utilizan los siguientes remplazos:

$$\frac{du}{dt} = u'\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = u''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + u'\left(\frac{ds}{dt}\right)'\frac{ds}{dt},$$
$$\frac{dv}{dt} = v'\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = v''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + v'\left(\frac{ds}{dt}\right)'\frac{ds}{dt},$$

en los que las primas denotan derivadas respecto del parámetro s. Nótese que la expresión $\left(\frac{ds}{dt}\right)'$ debe entenderse como el resultado de escribir $\frac{ds}{dt}$ en términos del parámetro s y despues derivar. Estos remplazos muestran que cada término de la ecuación (8.2) se multiplica por $\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$, excepto por la aparición de un término de la forma $u'v' \left(\frac{ds}{dt}\right)' \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ en cada uno de los productos v'u'' y u'v''. Cómo estos últimos tienen signo distinto, los términos adicionales se cancelan. En consecuencia, podemos tomar, por ejemplo, v como parámetro, obteniendo la siguiente ecuación de segundo orden para las geodésicas:

$$u'' = \Gamma_{uu}^{v}(u')^{3} + (2\Gamma_{uv}^{v} - \Gamma_{uu}^{u})(u')^{2} + (\Gamma_{vv}^{v} - 2\Gamma_{uv}^{u})u' - \Gamma_{vv}^{u}.$$
(8.3)

Se sigue de los teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales que una ecuación de este tipo tiene una solución única dadas las condiciones iniciales $u(v_0) \ge u'(v_0)$. Concluimos que las geodésicas que pasan por un punto dado están totalmente determinadas por la dirección de la derivada en ese punto, o, en otras palabras:

Proposición 8.6. Por un punto arbitrario de una superficie regular pasa una única geodésica en cada dirección. \Box

Existe una ecuación más sencilla para las geodésicas que se obtiene igualando a cero las coordenadas tangenciales del vector derivado. Para ello consideremos una curva del tipo $\alpha(s) = \vec{x} (u(s), v(s))$ y derivemos para obtener una fórmula para la segunda derivada:

$$\vec{\alpha}''(s) = u'' \vec{x}_u + v'' \vec{x}_v + u'(\vec{x}_u)' + v'(\vec{x}_v)'.$$

Utilizamos la regla de la cadena para obtener:

$$\vec{\alpha}''(s) = u'' \vec{x}_u + v'' \vec{x}_v + (u')^2 \vec{x}_{uu} + 2(u')(v') \vec{x}_{uv} + (v')^2 \vec{x}_{vv}.$$

Tomando las coordenadas en la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}\}$, e igualando las dos primeras a cero, obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$u'' + (u')^{2}\Gamma_{uu}^{u} + 2(u')(v')\Gamma_{uv}^{u} + (v')^{2}\Gamma_{vv}^{u} = 0,$$

$$v'' + (u')^{2}\Gamma_{uu}^{v} + 2(u')(v')\Gamma_{uv}^{v} + (v')^{2}\Gamma_{vv}^{v} = 0.$$
(8.4)

Es claro que cualquier solución de este par de ecuaciones describe una geodésica, pues multiplicando la segunda ecuación por u' y restándole el producto de v' por la primera se obtiene nuestra ecuación anterior. Afirmamos, no obstante, que las soluciones de este sistema de ecuaciones corresponden a geodésicas parametrizadas por longitud de arco o, al menos, por un múltiplo de dicho parámetro, a diferencio de lo afirmado para (8.2). De hecho, la segunda derivada de cualquier curva que satisfaga ese par de ecuaciones es perpendicular al plano tangente, y por lo tanto, en particular, a la tangente a la curva. Es decir, satisface una relación del tipo $\vec{\alpha}''(s) \cdot \vec{\alpha}'(s) = 0$. Concluimos que la primera derivada tiene largo constante, de donde sa deduce la afirmación.

Ejercicios

- 1. Sea α el círculo en el que se intersecta el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano x = z. Encuentre los puntos de ese círculo en los que la curvatura geodésica, con respecto al cilindro, es máxima.
- 2. En el toro parametrizado por

$$\vec{x}(u,v) = \left(\cos\theta(2+\cos\phi), \sin\theta(2+\cos\phi), \sin\phi\right),$$

encuentre la curvatura geodésica de la curva $\phi = \text{constante. Sugerencia: Usar la definición.}$

- 3. En el plano hiperbólico, calcule la curvatura geodésica de la "recta" y = cte.
- 4. Probar que toda recta contenida en una superficie es una geodésica.
- 5. Sea $t \mapsto \overrightarrow{\alpha}(t)$ una curva en el semiplano $\{(0, y, z) | y > 0\}$, y sea S la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva alrededor del eje Z. Probar que los unicos paralelos de S que son geodésicas son los que corresponden a puntos de la curva donde la tangente es vertical.
- Escriba la ecuación de la curvatura geodésica para la esfera y utilicela para probar que los círculos máximos son geodésicas.

- 7. Utilice los símbolos de Christoffel del plano en coordenadas polares para encontrar las geodésicas de esta superficie.
- 8. Pruebe que la curvatura geodésica de un círculo arbitrario contenido en una esfera es constante.

Geodésicas, el camino más corto entre dos puntos

En lenguaje corriente, se utiliza la palabra geodésica en el sentido de el camino mas corto entre dos puntos. No es cierto, en general, que las geodésicas que hemos definido aquí sean siempre el camino mas corto entre dos cualesquiera de sus puntos, pero si se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8.7. La curva mas corta que une dos puntos dados de una superficie es, si existe, una geodésica. Más generalmente, las geodésicas son, precisamente, los mínimos locales del conjunto de curvas que unen dos puntos dados.

Demostración. Sea α una curva contenida en una superficie S que une dos puntos dados $P, Q \in S$. Supongamos que α es un mínimo local de la función largo, es decir, toda función suficientemente cercana a α es más larga. Recuérdese que cada punto de S tiene una vecindad homeomorfa a un abierto del espacio euclídeo, por lo que cada curva suficientemente cercana a α puede deformarse en α , en el sentido que se definió en el Capítulo 4. La hipótesis dice, por lo tanto, que para cada deformación diferenciable $(t, \epsilon) \mapsto \gamma(t, \epsilon)$ que satisface las identidades

$$\gamma(0,\epsilon)=P,\qquad \gamma(1,\epsilon)=Q,\qquad \gamma(t,0)=\alpha(t),$$

la función largo, definida por $L(\epsilon) = \int_0^1 \left| \vec{\gamma}_t(t, \epsilon) \right| dt = \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\gamma}(t, \epsilon) \right| dt$ tiene un mínimo local en $\epsilon = 0$. Por simplicidad escribamos $g(t, \epsilon) = \left| \vec{\gamma}_t(t, \epsilon) \right|$. Dado que la función L puede derivarse bajo el signo integral en una vecindad de 0, se tiene que $L'(0) = \int_0^1 g_\epsilon(t, 0) dt = 0$. Nótese ahora que, por definición, tenemos la relación $g(t, \epsilon)^2 = \vec{\gamma}_t(t, \epsilon) \cdot \vec{\gamma}_t(t, \epsilon)$. Derivando con respecto a ϵ y evaluando en 0 se tiene $g_\epsilon(t, 0)g(t, 0) = \vec{\gamma}_{t\epsilon}(t, 0) \cdot \vec{\gamma}_t(t, 0)$. Derivando la relación $\gamma(t, 0) = \alpha(t)$, obtenemos $\vec{\gamma}_t(t, 0) = \vec{\alpha}'(t)$ y $g(t, 0) = \left| \vec{\alpha}'(t) \right|$, por lo que podemos escribir la igualdad precedente como sigue:

$$g_{\epsilon}(t,0) = \overrightarrow{\gamma}_{t\epsilon}(t,0) \cdot \frac{\overrightarrow{\alpha}'(t)}{\left|\overrightarrow{\alpha}'(t)\right|} = \overrightarrow{\gamma}_{t\epsilon}(t,0) \cdot \overrightarrow{T}(t).$$

Remplazando este valor de g_{ϵ} en la expresión para L'(0), obtenemos la relación integral $\int_{0}^{1} \overrightarrow{\gamma}_{\epsilon t}(t, 0) \cdot \overrightarrow{T}(t) dt = 0$. Integrando por partes, se tiene

$$\vec{\gamma}_{\epsilon}(1,0)\cdot\vec{T}(1) - \vec{\gamma}_{\epsilon}(0,0)\cdot\vec{T}(0) - \int_{0}^{1}\vec{\gamma}_{\epsilon}(t,0)\cdot\vec{T}_{t}(t)\,dt = 0.$$

Como $\gamma(0,\epsilon)$ y $\gamma(1,\epsilon)$ son constantes, sus derivadas son nulas, por lo que nos queda sólamente el último término, es decir

$$\int_0^1 \overrightarrow{\gamma}_{\epsilon}(t,0) \cdot k(t) \overrightarrow{N}(t) dt = \int_0^1 \overrightarrow{\gamma}_{\epsilon}(t,0) \cdot \overrightarrow{T}_t(t) dt = 0.$$

Afirmamos que esta identidad, que es válida para cada deformación γ , implica que el vector curvatura $k(t) \stackrel{\rightarrow}{N}(t)$ es perpendicular al plano tangente en cada punto. Esto, por cierto, nos dice que la curva es una geodésica. Supongamos que esto no es así, es decir, que existe un punto t_0 y un vector tangente $\vec{w} \in T_{\alpha(t_0)}S$ tales que $\vec{w} \cdot k(t_0) \stackrel{\rightarrow}{N}(t_0) \neq 0$. Sin perdida de generalidad, suponemos que este producto es positivo. Entonces existe una vecindad U de t_0 en la cual se tiene $\vec{w}(t) \cdot k(t) \stackrel{\rightarrow}{N}(t) > 0$, donde $\vec{w}(t)$ es la proyección ortogonal de \vec{w} en el plano tangente $T_{\alpha(t)}S$. Lo importante es que se trata de una función continua de t que pertenece al espacio tangente en cada punto de la curva. Se sigue que para cualquier función diferenciable no negativa ϕ que se anula fuera de U y es positiva en t_0 se tiene

$$\int_0^1 \phi(t) \ \overrightarrow{w}(t) \cdot k(t) \ \overrightarrow{N}(t) \, dt > 0$$

Basta ahora ver que existe una familia de curvas cuya derivada $\gamma_{\epsilon}(t,0)$ coincide con $\phi(t) \overrightarrow{w}(t)$. De hecho, si escribimos \overrightarrow{w} en términos de la base canónica del plano tangente como sigue:

$$\vec{w}(t) = a(t) \vec{x}_u \Big(u(t), v(t) \Big) + b(t) \vec{x}_v \Big(u(t), v(t) \Big),$$

entonces basta tomar la deformación dada por la fórmula

$$\gamma(t,\epsilon) = \overrightarrow{x} \Big(u(t) + \epsilon \phi(t)a(t), v(t) + \epsilon \phi(t)b(t) \Big).$$

Ejemplo 8.8. El largo de una curva $\alpha(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$ contenida en la esfera de radio 1 se obtiene integrando la primera forma fundamental, la que

en este caso es $(\phi')^2 + (\operatorname{sen} \phi)^2 (\theta')^2$, donde ϕ es el ángulo medido desde el polo norte, mientras que θ es el ángulo que determina la longitud. Tomemos dos puntos P y Q en la esfera. Es posible, mediante movimientos rígidos, los que siempre son isometrías, llevar uno de estos puntos, digamos P, al polo norte. Es fácil ver, usando la fórmula antes descrita para la primera forma fundamental, que la curva más corta que los une es el meridiano que pasa por Q (ver Figura 8.2). Se concluye de aquí que los círculos máximos, es decir los círculos de un radio igual al de la esfera, son geodésicas, y por lo tanto estas son las únicas geodésicas, ya que por un punto cualquiera, que de nuevo podemos suponer que es el polo norte, para un círculo máximo en cada dirección, como se aprecia a la derecha de la figura.



Figura 8.2: Geodésicas en la esfera. La figura de la derecha corresponde al punto de vista de un observador colocado sobre la esfera.

Ejemplo 8.9. Tomemos los puntos P y Q en el cilindro parametrizado por \vec{x} (θ, z) = (cos θ , sen θ, z), tal como se muestra en la Figura 8.3. La parametrización es una isometría, puesto que la primera forma fundamental está dada por E = G = 1, F = 0. Se concluye que las geodésicas son las imágenes de las rectas del plano. Sin embargo, como \vec{x} (θ, z) es periodica en θ , cada punto tiene muchas preimágenes y podemos trazar rectas que unan pre-imágenes cualesquiera. Nótese que sólo una de ellas es una curva de largo mínimo.



Figura 8.3: Dos geodésicas en el cilindro.

Ejercicios

- 1. Explique por qué un avión que vá de Nueva York a Madrid (ciudades que están aproximadamente en la misma latitud, como se vé en la figura 7.4) ahorra combustible si en lugar de seguir un paralelo se desvía hacia el norte. Hasta que latitud debería llegar para minimizar su gasto de combustible?
- 2. Se construye un cono de cartón como el de la Figura 8.5, recortando un ángulo α de una hoja. En lados opuestos se colocan dos alfileres y en ellos se amarra una banda elástica tirante como muestra la figura. Que sucede? La banda permanece al mismo nivel o sube un poco? Si marcamos con un lapiz el recorrido de la banda, que sucede al estirar el cartón de nuevo? Que tan cerca está el punto más alto de la banda elástica de la esquina del cono en términos del ángulo α ?
- 3. Razonando como en el ejemplo 8.8, probar que, en toda superficie de revolución, los meridianos ($\theta = \text{cte}$) son geodésicas.
- 4. En el cono de ecuación $x^2 + y^2 \lambda z^2 = 0$, para que valores de λ existen exactamente cuatro geodésicas cerradas que unen un punto dado con sigo mismo sin pasar por el vértice?
- 5. Probar que toda geodésica en un cilindro circular recto es un círculo, una recta o una hélice.
- 6. Si C es un cilindro circular recto con generatriz vertical, probar que dos puntos de C están unidos por una infinidad de geodésicas excepto



Figura 8.4: Un avión que ahorra combustible.

si ambos puntos estan en un círculo geodésico.

- 7. Considere el toro plano del Ejercicio 6 de la página 118. Pruebe que este toro tiene una geodésica cerrada de largo $\rho \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\rho = 1$ o bien $\rho = \sqrt{n^2 + m^2}$ para dos enteros n y m relativamente primos. Existen geodésicas de largo infinito en esta superficie?
- 8. Probar que la función

$$(x,y)\mapsto \left(rac{x}{x^2+y^2},rac{y}{x^2+y^2}
ight),$$

es una isometría en el plano hiperbólico. Utilice este resultado para probar que los semicírculos perpendiculares al eje real son geodésicas del plano hiperbólico. Pruebe que por un punto dado del esta superficie pasa uno de estos círculos en cada dirección no vertical y concluya que toda geodésica del plano hiperbólico es una recta vertical o un semicírculo perpendicular al eje X.

Derivada covariante y transporte paralelo

Supongamos que se tiene un campo vectorial \vec{w} en el plano, lo que en este caso es lo mismo que decir una función de \mathbb{R}^2 en sí mismo donde las



Figura 8.5: Un cono de cartón.

imágenes se interpretan como vectores. Bajo que condiciones afirmamos que este campo vectorial es constante? Por supuesto que queremos decir que el campo toma el mismo valor en cada punto, pero nos gustaría tener una definición que pudieramos extender a una variedad cualquiera, donde los planos tangentes en puntos diferentes no pueden identificarse de manera natural. Una posible respuesta sería decir que el campo vectorial es constante cuando todas sus derivadas parciales se anulan, es decir cuando se tiene que $\vec{w}_x = \vec{w}_y = 0$.

Supongamos ahora que en lugar de las coordenadas cartesianas usuales utilizamos coordenadas curvilineas, es decir un mapa del plano diferente de la identidad. Como interpretamos el resultado anterior en este caso? Podemos escribir nuestro campo en términos de los vectores de la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ de la forma $\vec{w} = a^u \vec{x}_u + a^v \vec{x}_v$, donde los "exponentes" son sólo superíndices que denotan la posición de la coordenada y se usan así nada más que por comodidad de la notación. En este caso las derivadas parciales pueden calcularse mediante las ecuaciones siguientes:

$$\vec{w}_u = a_u^u \vec{x}_u + a^u \vec{x}_{uu} + a_u^v \vec{x}_v + a^v \vec{x}_{vu},$$
$$\vec{w}_v = a_v^u \vec{x}_u + a^u \vec{x}_{uv} + a_v^v \vec{x}_v + a^v \vec{x}_{vv}.$$

En el caso del plano la segunda forma fundamental es nula, por lo que las segundas derivadas de la parametrización se re-escriben, mediante símbolos de Christoffel, en la forma $\vec{x}_{ij} = \sum_{k \in \{u,v\}} \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k$. Con esta notación, la condición para que el campo vectorial sea constante se re-escribe mediante la fórmula $a_j^i + \sum_{k \in \{u,v\}} a^k \Gamma_{jk}^i = 0$, donde el sub-índice "j" en a_j^i denota una derivada parcial. Esta fórmula es la que nos gustaría definir en el caso

de una superficie cualquiera. Desgraciadamente, no existe, como veremos luego, una buena definición de campo vectorial constante en una superficie curva, pero sí podemos utilizar la fórmula precedente para definir el concepto de "transporte paralelo a lo largo de una curva". Para esto, utilizamos la fórmula anterior para definir la derivada covariante de un campo vectorial $\vec{w} = \sum_{k \in \{u,v\}} a^k \vec{x}_k$ definido en una superficie arbitraria, es decir, definimos para cada $j \in \{u,v\}$, la correspondiente derivada covariante mediante la fórmula siguiente:

$$D_j \stackrel{\rightarrow}{w} = \sum_{i \in \{u,v\}} \left(a_j^i + \sum_{k \in \{u,v\}} a^k \Gamma_{jk}^i \right) \stackrel{\rightarrow}{x}_i.$$

Nótese que esta es simplemente la derivada parcial de \vec{w} como una función de un abierto de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 sin su componente normal a la superficie. Tal como sucede en el plano, podemos obtener la derivada direccional en una dirección cualquiera $\vec{z} = \sum_{k \in \{u,v\}} b^k \vec{x}_k$ mediante la fórmula $D_{\vec{z}} \vec{w} = \sum_{k \in \{u,v\}} b^k \vec{D}_k \vec{w}$. Un campo vectorial \vec{w} es transportado paralelamente a lo largo de una curva α si satisface la condición $D_{\vec{\alpha}(t)} \vec{w} = 0$ en cada punto de la curva. En otras palabras, si $\alpha(t) = \vec{x} \left(u(t), v(t) \right)$, debe satisfacerse la condición

$$\sum_{i,j\in\{u,v\}} j'(t) \left(a_j^i + \sum_{k\in\{u,v\}} a^k \Gamma_{jk}^i \right) \overrightarrow{x}_i = 0$$

en cada punto de la curva. Como los vectores \vec{x}_i forman una base, las ecuaciones nos quedan como sigue:

$$\sum_{j \in \{u,v\}} j'(t) \left(a_j^i + \sum_{k \in \{u,v\}} a^k \Gamma_{jk}^i \right) = 0.$$

Observamos que, por regla de la cadena, se tiene $(a^i)' = \sum_{j \in \{u,v\}} a_j^i j'$, por lo que esta última identidad puede escribirse

$$(a^{i})' + \sum_{j,k \in \{u,v\}} j'(t)a^{k}\Gamma^{i}_{jk} = 0.$$

Esta última ecuación no depende de los valores del campo vectorial fuera de la imágen de la curva, de modo que es posible definir el transporte paralelo de un vector tangente en un punto a lo largo de una curva que pasa por ese punto sin que este vector sea parte de un campo vectorial. En particular, podemos remplazar para \vec{w} el vector tangente a la curva, lo que nos dá las coordenadas $a^i = i'(t)$. En este caso la ecuación se vuelve

$$i''(t) + \sum_{j,k \in \{u,v\}} j'(t)k'(t)\Gamma_{jk}^{i} = 0,$$

lo que coincide con la ecuación (8.4) para las geodésicas de la superficie. Esto demuestra el siguiente resultado:

Proposición 8.10. Una curva es una geodésica si y sólo si su vector tangente en cualquier punto es el resultado de transportar paralelamente su vector tangente en cualquier otro punto a lo largo de la misma curva. \Box

Ejemplo 8.11. La figura 7.6 muestra un transporte paralelo en la esfera. En los meridianos, que son geodésicas, el transporte paralelo lleva tangentes en tangentes, por el resultado anterior. En el ecuador, donde todos los planos tangentes contienen un vector vertical, el transporte paralelo preserva dichos vectores. Observamos en la figura que es posible recorrer un ciclo y regresar al punto de partida con un vector diferente. El concepto de campo vectorial constante, por esta razón, no puede definirse en la esfera.



Figura 8.6: Transporte paralelo en la esfera.

Ejercicios

- 1. Probar que el transporte paralelo es una propiedad intrínseca de la superficie.
- 2. Sea S una superficie y α una curva en S. Demuestre la afirmación hecha en el texto de que si un vector está contenido en el plano tangente en cada punto de α , entonces su transporte paralelo por α es constante.
- 3. Probar que si dos campos vectoriales son transportados paralelamente a lo largo de una curva lo mismo ocurre con su suma.
- 4. Probar que al transportar paralelamente un vector a lo largo de un círculo maximo completo en la esfera se regresa al vector de partida.
- 5. Demuestre que, en el toro plano del Ejercicio 6 de la página 118, el transporte paralelo es independiente del camino.
- 6. Probar, mediante un ejemplo, que el transporte paralelo en el cono no es independiente del camino. Nótese que, por el ejercicio uno de esta sección, los caminos considerados no pueden estar contenidos en una región que sea isométrica a una región del plano.

Capítulo 9

El Teorema de Gauss-Bonnet

Nuestro principal propósito en este capítulo es dar la demostración general del teorema de Gauss-Bonnet, un importante resultado que relaciona las curvaturas gaussiana y geodésica. Para ello necesitaremos algunos resultados auxiliares que hemos agrupado en la primera sección de este capítulo.

Algunas fórmulas en coordenadas ortogonales

Lema 9.1. Sea P un punto arbitrario de una superficie S. Existe una parametrización de S en alguna vecindad de P para la cual la primera forma fundamental tiene una matriz de Gram diagonal, es decir F = 0.

Demostración. Sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva arbitraria que pasa por el punto $P = \alpha(t_0)$. Por cada punto $\alpha(t)$ de α denotamos por $s \mapsto \beta(t, s)$ a la geodésica que pasa por $\beta(t, 0) = \alpha(t)$ y es ortogonal a α en ese punto. Escribimos s para el parámetro por ser la longitud de arco de la geodésica correspondiente. Esta geodésica es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas condiciones iniciales dependen diferenciablemente del parámetro t. Concluímos que $(t, s) \mapsto \beta(t, s)$ es una función continua y diferenciable como función de dos variables. Nótese además que los vectores $\vec{\beta}_t(t_0, 0) = \vec{\alpha}'(t_0)$ y $\vec{\beta}_s(t_0, 0)$ son ortogonales, por lo que s y t forman un buen sistema de coordenadas en alguna vecindad de P. Denotamos a continuación por $r \mapsto \gamma(r, w_0)$ la curva que pasa por el punto $\gamma(0, w_0) = \beta(t_0, w_0)$, para un valor dado fijo de w_0 , y es ortogonal al vector $\vec{\beta}_s(t, s)$ en cada punto. En otras palabras, requerimos que la curva $r \mapsto \gamma(r, w_0)$ sea ortogonal a cada geodésica. Esto puede conseguirse rotando el campo vectorial $\vec{\beta}_s(t, s)$ en una dirección fija y calculando las líneas integrales del campo
vectorial así obtenido. Las curvas $r \mapsto \gamma(r, w_0)$ son, nuevamente, soluciones de una ecuación diferencial con coeficientes diferenciables. El mismo argumento precedente muestra que $(r, w) \mapsto \gamma(r, w)$ es derivable. Esto nos deja dos pares de parametros $(t, s) \neq (r, w)$ que definen mapas de la superficie en alguna vecindad de P. Es posible, por lo tanto, pensar en $s \neq t$ como funciones de los parámetros $r \neq w$. Además, cuando w = 0, la trayectoria ortogonal $\gamma(r, 0)$ coincide con la curva α , por lo que t(r, 0) = r. Del mismo modo se prueba que s(0, w) = w. Concluímos que la matriz Jacobiana $\begin{pmatrix} dt/dr & ds/dr \\ dt/dw & ds/dw \end{pmatrix}$ es la identidad en P. Nótese que lo mismo ocurre con la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} dt/dr & dw/dr \\ dt/dw & dw/dw \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} dt/dr & 0 \\ dt/dw & 1 \end{array}\right),$$

por lo que en alguna vecindad de P el par (t.w) es un buen sistema de coordenadas. Esto nos permite encontrar una parametrización ζ que satisface $\zeta(t(r,w),w) = \gamma(r,w)$. En términos de dicha parametrización, las curvas t =cte son las geodésicas de la familia descrita más arriba, mientras que las curvas w =cte coinciden con la familia de trayectorias ortogonales también descrita allí. El resultado sigue. \Box

Observación 9.2. La coordenada s es longitud de arco en cada una de las curvas t = cte, por lo que G = 1 en términos de las coordenadas $\{t, s\}$. Lo mismo sucede con r en el par de coordenadas $\{r, w\}$. Sin embargo, con respecto al par $\{t, w\}$, solo podemos asegurar que E = 1 en la curva w = 0 y que G = 1 en la curva $t = t_0$. No es posible, en general conseguir que E y G sean 1 en una vecindad de P, como lo muestran los resultados del capítulo anterior, puesto que ellos implican que la coordenada gaussiana sería nula en un caso semejante.

Para el siguiente resultado necesitamos definir una curvatura geodésica con signo que denotaremos \mathbf{k}_g . Esta es una generalización de la derivada angular θ' del capítulo 4. Recuerdese que, en el plano, θ' coincide con la curvatura k cuando la normal forma un ángulo de 90 grados en sentido levógiro con respecto a la tangente, y con -k cuando está a 90 grados en sentido es dextrógiro. Para que estas convenciones tengan sentido en una superficie, se necesita la siguiente condición técnica:

Definition 9.3. Un atlas de una superficie se dice orientado si todos sus cambios de coordenadas tienen jacobiano positivo. Una superficie se dice orientable si posee un atlas orientado. "Escoger una orientación" significa

escoger un atlas orientado. Dos atlas corresponden a la misma orientación si su unión es un atlas orientado.

Un atlas orientado nos permite distinguir entre giros a la izquierda y giros a la derecha, de manera anambigua y consistente en diferentes puntos de la superficie. En lo que sigue, asumiremos que S es una superficie orientable y que hemos escogido una orientación. En este caso hablaremos de una superficie orientada. Esto permite darle sentido a la siguiente definición:

Definition 9.4. La curvatura geodésica con signo $\mathbf{k}_g = \pm k_g$ se define de modo que su signo sea positivo cuando el vector curvatura geodésica forme un ángulo de 90 grados en sentido levógiro con respecto a la tangente, y que este signo sea negativo en caso contrario.

Lema 9.5 (Fórmula de Liouville). Sea S una superficie orientada con un mapa (del atlas orientado) que es ortogonal en una vecindad de un punto P. Sea $\alpha(t) = \vec{x} \left(u(t), v(t) \right)$ una curva en S que satisface u', v' > 0. Para cada punto de α se satisface la identidad siguiente:

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{k}_{g1}\cos\theta + \mathbf{k}_{g2}\sin\theta + \frac{d\theta}{ds},$$

donde θ es el ángulo que forma α con la curva v = cte, s es la longitud de arco de α , mientras \mathbf{k}_{g1} y \mathbf{k}_{g2} son las curvaturas geodésicas con signo de las curvas v = cte y u = cte, respectivamente.

Demostración. Fijemos un punto $P = \alpha(t_0) = \vec{x}(u_0, v_0)$. Tratandose de un sistema de coordenadas ortogonal, podemos definir una base ortonormal canónica mediante

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_u}{|\vec{x}_u|} = \frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E}}, \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_v}{|\vec{x}_v|} = \frac{\vec{x}_v}{\sqrt{G}}$$

Es importante notar aquí que, si bien la matriz de la primera forma fundamental es la identidad respecto de esta base, $\vec{e}_1 \ y \vec{e}_2$ no son las derivadas parciales del vector posición \vec{x} con respecto a ningún sistema de coordenadas, por lo que esto no define una isometría con el plano.

Escogemos un vector unitario $\vec{\mathbf{U}}$ que satisfaga $\vec{k}_g = \mathbf{k}_g \vec{\mathbf{U}}$, el que será paralelo o antiparalelo al vector curvatura geodésica según el signo de \mathbf{k}_g . En otras palabras, el vector $\vec{\mathbf{U}}$ se obtiene girando el vector tangente a la curva 90 grados en sentido levógiro.

En particular, si α fuera la curva coordenada $v = v_0$, entónces el vector tangente unitario sería \vec{e}_1 , por lo que el vector $\vec{\mathbf{U}}$ sería \vec{e}_2 . Del mismo modo, si α fuera la curva $u = u_0$, entónces el vector tangente sería \vec{e}_2 , de donde $\vec{\mathbf{U}} = -\vec{e}_1$. En otras palabras, la fórmula usual para el vector curvatura nos dá las identidades siguientes:

$$\frac{\vec{de}_2}{ds_2} = k_{n2} \vec{n} + \mathbf{k}_{g2} \vec{e}_1, \qquad \frac{\vec{de}_1}{ds_1} = k_{n1} \vec{n} - \mathbf{k}_{g1} \vec{e}_2$$

donden s_1 y s_2 son las longitudes de arco de las curvas $v = v_0$ y $u = u_0$ respectivamente. En el caso general se escribe $\overrightarrow{T} = \cos \theta \ \overrightarrow{e}_1 + \sin \theta \ \overrightarrow{e}_2$ y $\overrightarrow{\mathbf{U}} = -\sin \theta \ \overrightarrow{e}_1 + \cos \theta \ \overrightarrow{e}_2$. Derivando \overrightarrow{T} , se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \cos\theta \frac{d\vec{e}_1}{ds} + \sin\theta \frac{d\vec{e}_1}{ds} + \frac{d\theta}{ds}\vec{\mathbf{U}}.$$

Escribiendo los parámetros $u \neq v$ en la forma $u = u(s_1) \neq v = v(s_2)$, a lo largo de la correspondiente línea coordenada, y observando que dichas funciones satisfacen u'(0) = v'(0) = 1, concluímos que (s_1, s_2) es un buen sistema de coordenadas en alguna vecindad de P. Con respecto a estas coordenadas, la parametrización se escribe en la forma $\vec{y}(s_1, s_2) = \vec{x}(u(s_1), v(s_2))$, de donde se tiene el siguiente cálculo en el punto P:

$$\vec{y}_{s_1} = \frac{\vec{x}_u}{ds_1/du} = \vec{e}_1, \qquad \vec{y}_{s_2} = \frac{\vec{x}_v}{ds_2/du} = \vec{e}_2.$$

Es conveniente advertir al lector de una posible confusión:

El hecho de que s_1 sea la longitud de arco de la curva $v = v_0$ significa sólo que la identidad de arriva es válida a lo largo de dicha curva. Del mismo modo, se tiene G = 1 a lo largo de la curva $u = u_0$. Nada de esto implica que este sistema de coordenada defina una isometría de una región del plano en la superficie, lo que no puede ocurrir si la curvatura gaussiana es no nula.

En el nuevo sistema de coordenadas se puede calcular

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{\alpha}' = \frac{ds_1}{ds} \overrightarrow{y}_{s_1} + \frac{ds_2}{ds} \overrightarrow{y}_{s_2} = \frac{ds_1}{ds} \overrightarrow{e}_1 + \frac{ds_2}{ds} \overrightarrow{e}_2,$$

lo que puede compararse con la fórmula previa de la tangente para concluir las identidades $\frac{ds_1}{ds} = \cos \theta$ y $\frac{ds_2}{ds} = \sin \theta$. De nuevo, estas identidades son válidas sólo en el punto *P*. A partir de ellas podemos escribir

$$\frac{\vec{de_i}}{ds} = \frac{ds_1}{ds}\frac{\vec{de_i}}{ds_1} + \frac{ds_2}{ds}\frac{\vec{de_i}}{ds_2} = \cos\theta\frac{\vec{de_i}}{ds_1} + \sin\theta\frac{\vec{de_i}}{ds_2}$$

Remplazando estos valores en la expresión para la derivada de la tangente se concluye la siguiente fórmula:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \cos^2\theta \frac{d\vec{e}_1}{ds_1} + \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\vec{e}_1}{ds_2} + \frac{d\vec{e}_2}{ds_1}\right) + \sin^2\theta \frac{d\vec{e}_2}{ds_2} + \frac{d\theta}{ds}\vec{\mathbf{U}}$$

La demostración se concluye utilizando la expresión $\mathbf{k}_g = \frac{dT}{ds} \cdot \vec{\mathbf{U}}$, así como la fórmula $\vec{\mathbf{U}} = -\operatorname{sen} \theta \ \vec{e}_1 + \cos \theta \ \vec{e}_2$. Para eso se necesitan los siguientes productos internos:

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds_1} \cdot \vec{e}_1 = -\frac{d\vec{e}_1}{ds_1} \cdot \vec{e}_2 = -\mathbf{k}_{g1}, \qquad \frac{d\vec{e}_1}{ds_2} \cdot \vec{e}_2 = -\frac{d\vec{e}_2}{ds_2} \cdot \vec{e}_1 = \mathbf{k}_{g2} \qquad \mathbf{y}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds_1} \cdot \vec{e}_1 = \frac{d\vec{e}_1}{ds_2} \cdot \vec{e}_1 = \frac{d\vec{e}_2}{ds_1} \cdot \vec{e}_2 = \frac{d\vec{e}_2}{ds_2} \cdot \vec{e}_2 = 0.$$

Estos se concluyen de las fórmulas explícitas derivando, respecto de cada parámetro, las relaciones $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ y $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$. Dejamos los detalles al lector. De todo este cálculo se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{k}_{g} = \mathbf{k}_{g1}\cos^{3}\theta + \mathbf{k}_{g2}\sin^{3}\theta + \mathbf{k}_{g1}\cos\theta\sin^{2}\theta + \mathbf{k}_{g2}\cos^{2}\theta\sin\theta + \frac{d\theta}{ds}$$
$$= \mathbf{k}_{g1}\cos\theta + \mathbf{k}_{g2}\sin\theta + \frac{d\theta}{ds}.$$

El resultado sigue.

Observación 9.6. Cuando la superficie es el plano y las coordenadas son cartesianas, se tiene $\mathbf{k}_{g1} = \mathbf{k}_{g2} = 0$, por lo que recuperamos el hecho, demostrado en el capítulo 2, de que la curvatura es, salvo por un signo, la derivada del ángulo.

Observación 9.7. Cuando se recorre una curva en sentido contrario se invierte el signo de las funciones trigonométricas, dado que se remplaza la tangente por su inverso aditivo. Invertir el signo del parámetro cambia también el signo de la derivada $\frac{d\theta}{ds}$. Se concluye que, al recorrer una curva en sentido contrario, la integral de \mathbf{k}_g cambia de signo. Esta observación se utiliza en la demostración de nuestro resultado principal.

Lema 9.8. En las hipótesis del resultado anterior, si $\Gamma_{uu}^v > 0$ en un punto P, entonces $\mathbf{k}_{g1} > 0$ en ese punto.

Demostración. Recordemos la ecuación

$$\frac{\pm k_g}{\sqrt{EG-F^2}} = \Gamma_{uu}^v (u')^3 + (2\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u)(u')^2 v' + (\Gamma_{vv}^v - 2\Gamma_{uv}^u)u'(v')^2 - \Gamma_{vv}^u(v')^3 + (u'v'' - u''v'),$$
(9.1)

demostrada en el capítulo anterior. Sea α la geodésica que satisface u' = 1y v' = 0. Esta curva debe cumplir v'' < 0, lo que significa que pasa bajo el eje (ver Figura 9.1). Se sigue que la curva v = cte se curva hacia arriba



Figura 9.1: La geodésica (j, en rojo) en un sistema de coordenadas ortogonal cuando $\Gamma_{uu}^v > 0$.

respecto de la geodésica. Esto significa que el vector \vec{k}_{g1} se encuentra en el semiplano superior. El resultado sigue.

Lema 9.9. Sea S una superficie orientada provista de una parametrización ortogonal. La curvatura gaussiana en S satisface la identidad

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[-\frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{k}_{g2} \sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{k}_{g1} \sqrt{E}) \right],$$

de modo que, en particular, si D es un disco es S parametrizado por una región C del plano, se tiene la identidad

$$\iint_{D} K \, dA = \iint_{C} \left[-\frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{k}_{g2} \sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{k}_{g1} \sqrt{E}) \right] \, du \, dv$$

Demostración. Como las coordenadas son ortogonales, la fórmula para la curvatura gaussiana que calculamos en el capítulo precedente no está definida. Necesitamos, por lo tanto, una fórmula diferente. Comenzamos por derivar las expresiones para \vec{x}_{uu} y \vec{x}_{uv} , en términos de la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}\}$, para obtener las expresiones siguientes:

$$\vec{x}_{uuv} = \Gamma^u_{uu,v} \vec{x}_u + \Gamma^u_{uu} \vec{x}_{uv} + \Gamma^v_{uu,v} \vec{x}_v + \Gamma^v_{uu} \vec{x}_{vv} - e_v \vec{n} - e \vec{n}_v,$$
$$\vec{x}_{uvu} = \Gamma^u_{uv,u} \vec{x}_u + \Gamma^u_{uv} \vec{x}_{uu} + \Gamma^v_{uv,u} \vec{x}_v + \Gamma^v_{uv} \vec{x}_{vu} - f_u \vec{n} - f \vec{n}_u.$$

En este caso la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}\}$ es ortogonal, por lo que podemos simplemente tomar el producto punto de cada lado con \vec{x}_v e igualar, obteniendo esta identidad:

$$G\Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} + G\Gamma^v_{uu,v} + G\Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - eg = G\Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + G\Gamma^v_{uv,u} + G\Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{vu} - f^2.$$

Reordenando se tiene lo siguiente:

$$-KE = \Gamma^v_{uv,u} - \Gamma^v_{uu,v} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{vu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} - \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv}$$

Especializando las fórmulas para los símbolos de Christoffel al caso diagonal, comprobamos fácilmente las siguientes fórmulas:

$$\begin{split} \Gamma^u_{uu} &= \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma^v_{uu} = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma^u_{uv} = \frac{E_v}{2E}, \\ \Gamma^v_{uv} &= \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma^u_{vv} = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma^v_{vv} = \frac{G_v}{2G}. \end{split}$$

Remplazando estas identidades en la fórmula anterior, llegamos a esta conclusión:

$$-EK = \frac{G_{uu}G - G_u^2}{2G^2} + \frac{E_{vv}G - E_vG_v}{2G^2} - \frac{E_v^2}{4EG} - \frac{E_uG_u}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} + \frac{E_vG_v}{4G^2}$$
$$= \frac{G_{uu}}{2G} + \frac{E_{vv}}{2G} - \frac{E_v^2}{4EG} - \frac{E_uG_u}{4EG} - \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{E_vG_v}{4G^2}.$$

Por otro lado, las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas se obtienen especializando la ecuación (9.1). Usando que la forma es diagonal, obtenemos, para la curva v =cte, la relación

$$\mathbf{k}_{g1} = \Gamma_{uu}^{v}(u')^{3}\sqrt{EG} = -\frac{E_{v}}{2E\sqrt{G}}$$

donde hemos utilizado el hecho de que si la derivada en la curva v = cte se toma con respecto a la longitud de arco, entonces $u' = E^{-1/2}$. El signo se obtiene del lema precedente.

Intercambiar las coordenadas tiene el efecto de cambiar la orientación, por lo que la ecuación correspondiente para la otra coordenada toma la forma siguiente:

$$-\mathbf{k}_{g2} = \Gamma_{vv}^u (v')^3 \sqrt{EG} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

Desarrollamos ahora la expresión

$$-\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{k}_{g2}\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{k}_{g1}\sqrt{E}) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right) = \frac{E_u G_u}{4E^{3/2}G^{1/2}} - \frac{G_{uu}}{2E^{1/2}G^{1/2}} + \frac{G_u^2}{4E^{1/2}G^{3/2}} + \frac{E_v G_v}{4G^{3/2}E^{1/2}} - \frac{E_{vv}}{2E^{1/2}G^{1/2}} + \frac{E_v^2}{4E^{3/2}G^{1/2}}$$

y el resultado sigue comparando esta expresión con la obtenida para la curvatura Gaussiana. $\hfill\square$

Ejercicios

- 1. Dé una interpretación geométrica para cada una de las coordenadas t, s, r y w, definidas en la demostración del Lema 9.1, en una vecindad de un punto en la esfera.
- 2. Demuestre que todo punto en una superficie tiene una vecindad con un sistema de coordenadas en la cual E = 1 en cada punto.
- 3. Demuestre que todo punto en una superficie tiene una vecindad con un sistema de coordenadas en la cual las curvas coordenadas son geodésicas.
- 4. Utilice la fórmula para la curvatura gaussiana demostrada en este capítulo para probar que el plano hiperbólico tiene curvatura gaussiana constante y negativa.
- 5. Probar que ninguna región del plano hiperbólico puede ser isométrica a una región del plano o de la esfera.

El teorema de Gauss-Bonnet para discos

Proposición 9.10 (Teorema de Gauss-Bonnet). Sea α una curva en una superficie S que encierra una región D homeomorfa a un disco. Supongamos que α es regular excepto por un número finito de esquinas donde los



Figura 9.2: Una curva no regular y su aproximación regular.

segmentos correspondientes forman ángulos exteriores $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Entonces se tiene la relación

$$\int_{\alpha} \mathbf{k}_g \, ds + \iint_D K \, dA + \sum_{i=1}^r \theta_i = 2\pi.$$

Demostración. Supondremos primero que el disco está contenido en una vecindad en la cual la superficie tiene una parametrización ortogonal y la curva α es regular, siendo β su preimagen bajo la parametrización. En este caso, podemos realizar el siguiente cálculo, Utilizando la Fórmula de Liouville y el Teorema de Green:

$$\int_{\alpha} \mathbf{k}_{g} ds = \int_{\alpha} (\mathbf{k}_{g1} \cos \theta + \mathbf{k}_{g2} \sin \theta) ds + \int_{\alpha} \frac{d\theta}{ds} ds$$
$$= \int_{\alpha} \left(\mathbf{k}_{g1} \frac{ds_{1}}{ds} + \mathbf{k}_{g2} \frac{ds_{2}}{ds} \right) ds + 2\pi$$
$$= \int_{\beta} \mathbf{k}_{g1} \frac{ds_{1}}{du} du + \mathbf{k}_{g2} \frac{ds_{2}}{dv} dv + 2\pi$$
$$= \int_{\beta} \mathbf{k}_{g1} \sqrt{E} du + \mathbf{k}_{g2} \sqrt{G} dv + 2\pi$$
$$= \iint_{C} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{k}_{g2} \sqrt{G}) - \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{k}_{g1} \sqrt{E}) \right] du dv + 2\pi$$
$$= -\iint_{D} K dA + 2\pi.$$

Nótese que hemos usado, en este cálculo, las longitudes de arco s_1 y s_2 que se definieron en la sección anterior.

Consideremos a continuación el caso en el cual α tiene una cantidad finita de esquinas. Por simplicidad, consideramos el caso de una única esquina, el caso general es análogo. Nótese que α puede aproximarse por una sucesión de curvas regulares $\{\alpha_n\}_n$ (ver Figura 8.2) que difieren de la curva con esquinas en un pequeño intervalo $I_n = [r_n, s_n] \subseteq [a, b]$ de largo menor a 1/n y de modo que para todo t se tenga $|\alpha_n(t) - \alpha(t)| < 1/n$. Tambien pediremos que el largo de la curva restringida a I_n tenga una cota de la forma M/n. Esto es fácil de conseguir con curvas explícitas, pero no es automático ya que siempre puede aproximarse una curva por curvas de oscilación muy rápida.

Es fácil ver que si D_n es el disco encerrado por α_n , se tiene

$$\iint_{D_n} K \, dA \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \iint_D K \, dA,$$

dado que ambas regiones coinciden salvo por un conjunto contenido en una vecindad de la esquina cuyo radio converge a 0, mientras que la función permanece acotada. La demostración para los términos restantes es más elaborada. Denotemos por σ_n la longitud de arco en α_n , y observemos que la curvatura geodésica de ambas curvas coinciden fuera del intervalo I_n , por lo que, si **k** es la curvatura geodésica de α y \mathbf{k}_n la de α_n , se tiene la siguiente relación:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\alpha_n} \mathbf{k}_n \, d\sigma_n = \lim_{n \to \infty} \left[\int_a^{r_n} \mathbf{k}(s) \, ds + \int_{r_n}^{s_n} \mathbf{k}_n(s) \, d\sigma'_n(s) \, ds + \int_{s_n}^b \mathbf{k}(s) \, ds \right]$$
$$= \int_{\alpha} \mathbf{k}_g \, ds + \lim_{n \to \infty} \left(\int_{r_n}^{s_n} \mathbf{k} \Big(\alpha_n(s) \Big) \sigma'_n(s) \, ds \Big) \, .$$

Para calcular el límite restante volvemos a utilizar la fórmula de Liouville

$$\int_{r_n}^{s_n} \mathbf{k}_n(s) \, d\sigma_n = \int_{r_n}^{s_n} \left(\mathbf{k}_{g1} \cos \theta + \mathbf{k}_{g2} \sin \theta \right) \, d\sigma_n + \int_{r_n}^{s_n} \frac{d\theta}{d\sigma_n} \, d\sigma_n$$

El integrando en la primera integral es acotado por lo que esa integral tiende a 0. La segunda integral mide el cambio total del ángulo en la pequeña curva que aproxima la esquina, por lo que converge claramente al ángulo exterior. Esto concluye el segundo caso.

Supongamos ahora que queremos demostrar el teorema para un disco, sabiendo que se cumple para cada una de sus mitades D_1 y D_2 , como en la Figura 8.3. Denotemos por $\theta_1, \ldots, \theta_r$ los ángulos exteriores de D_1 y ϕ_1, \ldots, ϕ_s los ángulos exteriores de D_2 . Sea α_1 la curva borde de D_1 y sea



Figura 9.3: Subdividiendo un disco.

 α_2 la curva borde de $D_2.$ Tenemos

$$\int_{\alpha_1} \mathbf{k}_g \, ds + \iint_{D_1} K \, dA + \sum_{i=1}^r \theta_i = 2\pi \qquad \mathbf{y}$$
$$\int_{\alpha_2} \mathbf{k}_g \, ds + \iint_{D_2} K \, dA + \sum_{i=1}^s \phi_i = 2\pi.$$

Al sumar estas dos igualdades, las integrales de la curvatura gaussiana y las integrales de linea se suman para dar los valores correspondientes del disco D. Nótese que las integrales de línea sobre el lado común se cancelan como se mencionó anteriormente. Los ángulos exteriores de D son $\theta_3, \ldots, \theta_r, \phi_3, \ldots, \phi_s$ y los "ángulos especiales" siguientes:

$$\gamma_1 = \theta_1 + \phi_1 - \pi, \qquad \gamma_2 = \theta_2 + \phi_2 - \pi$$

Nótese que en la Figura 8.3 pusimos $\gamma_2 = 0$, a fin de ilustrar también este caso. Se sigue que al sumar las dos ecuaciones de mas arriba se tiene lo que sigue:

$$\int_{\alpha} \mathbf{k}_g \, ds + \iint_D K \, dA + \sum_{i=3}^s \phi_i + \sum_{i=3}^r \theta_i + (\gamma_1 + \pi) + (\gamma_1 + \pi) = 4\pi.$$

Cancelando 2π de cada lado se sigue el resultado pedido para D.

Consideramos ahora el caso general. Basta ver que cada disco puede subdividirse en subdiscos arbitrariamente pequeños mediante subdivisiones sucesivas hasta que cada uno caiga dentro de un mapa apropiado para utilizar los casos ya demostrados. De hecho, si se subdivide un disco, el que mediante un homeomorfismo podemos suponer que es un cuadrado lleno, en subcuadrados como muestra la Figura 8.4, este puede reconstruirse agregando los cuadrados de uno por uno según la numeración indicada, de modo que a cada nuevo cuadrado pequeño, que cae dentro de la imágen de un mapa, se le puede dar, cambiando el signo de uno de los parámetros de ser necesario, una orientación consistente con la de los cuadrados ya agregados. Por ejemplo, al agregar el cuadrado marcado con x debe dársele una orientación consistente con la figura formada por los cuadrados 1 a 17. El resultado sigue.

15	16	17	x			
8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7

Figura 9.4: Subdividiendo un cuadrado.

Nótese que, durante el curso de esta demostración se ha probado que toda superficie homeomorfa a un disco es orientable. Un resultado intuitivo, pero no necesariamente inmediato.

Ejercicios

- 1. Demuestre que, en una superficie de curvatura gaussiana negativa, la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico es menor que π .
- 2. Utilizando el Teorema de Gauss-Bonnet, calcule el área de la región del plano hiperbólico que se encuentra por encima del círculo unitario y entre las rectas de ecuación $x = \pm 1$.

- 3. Probar que una superficie de curvatura gaussiana negativa no puede contener un disco cuyo borde sea una geodésica.
- 4. Utilice el teorema de Gauss-Bonnet para calcular la curvatura geodésica del círculo v = c en la esfera con la parametrización

$$\overrightarrow{x}(u,v) = \Big(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v\Big).$$

Puede utilizar el área del casquete como conocida.

- 5. Utilice el teorema de Gauss-Bonet para calcular el área del casquete esférico limitado por el paralelo v = c de la esfera unitaria. Puede utilizar la curvatura gaussiana del círculo borde como conocida.
- 6. Sea S una superficie plana, salvo por un cototo, como el de la Figura 8.5. Probar que existen puntos del cototo con curvatura gaussiana negativa (Sugerencia: Aplicar el Teorema de Gauss-Bonnet a la zona delimitada por el círculo rojo).



Figura 9.5: Superficie plana con un cototo.

- 7. Probar que la curvatura gaussiana del plano hiperbólico y la curvatura geodésica de la curva $v = v_0$ en el mismo coinciden (sugerencia: aplicar el Teorema de Gauss-Bonnet a un rectángulo).
- 8. En el plano hiperbólico, calcule el área del triángulo geodésico limitado por las geodésicas x = 0, $x^2 + y^2 = 1$ y $(x 1/2)^2 + y^2 = 1$. Utilice este cálculo y el teorema de Gauss-Bonnet para calcular la curvatura del plano hiperbólico.
- 9. Utilice el ejercicio anterior y el teorema de Gauss-Bonnet para dar una fórmula para el área de cualquíer triángulo geodésico en el plano hiperbólico en función de sus ángulos interiores.

10. Probar que el teorema de Gauss-Bonnet es válido para el cono (o para una superficie con una punta del mismo tipo) si se asume que la curvatura total concentrada en la punta es igual al defecto angular. Recuerde que el defecto angular de un cono es el ángulo que le falta para llegar a 2π al ángulo que forma la punta una vez recortado por un costado y extendido. Es válida la fórmula si el defecto angular es negativo?

La característica de Euler

En esta sección estudiaremos la forma más general del Teorema de Gauss-Bonnet. Como vimos en la demostración de la versión para discos, la orientación de los mapas juega un papel fundamental. Por esta razón, la forma general del Teorema de Gauss-Bonnet que damos abajo se aplica sólo a superficies orientables.

Proposición 9.11 (Teorema de Gauss-Bonnet para superficies orientables). Sea S una superficie orientable compacta con un borde que consiste en un número finito de curvas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Supongamos que cada α_i es regular, excepto por un número finito de esquinas donde los segmentos correspondientes formen ángulos exteriores $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Entonces la cantidad

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} \mathbf{k}_g \, ds + \iint_S K \, dA + \sum_{i=1}^{r} \theta_i \right]$$

depende sólo de la clase de homeomorfía de S. La curvatura con signo debe interpretarse como positiva si el vector curvatura apunta al interior de la superficie S y como negativa en caso contrario.

La cantidad $\chi(S)$ es conocida como la característica de Euler de S.

Demostración. Como antes, se puede subdividir una superficie arbitraria en pequeños trozos homeomorfos a discos. Sin embargo, en este grado de generalidad no es posible asegurar que puede agregarse cada nuevo disco con una orientación que sea compatible con la de los discos ya agregados. por ejemplo considerese el caso ilustrado en la Figura 8.6.A, donde los discos en azul oscuro ya se han agregado. Al agregar el disco naranja debe escogerse una orientación que sea compatible simultaneamente con la de los dos discos azules que bordean al naranja. Esto se consigue asumiendo a priori la existencia de un atlas orientado. Por otro lado, al agregar



Figura 9.6: Subdividiendo una superficie arbitraria.

un cuadrado que se pega a la figura ya agregada en más de un segmento de curva, el mismo argumento de la sección precedente (el que utilizaba la Figura 8.3) muestra que la característica de Euler disminuye en uno por cada segmento adicional. Por otro lado, al agregar un disco que tapa un hueco, como en la Figura 8.6.B, la característica de Euler debe aumentar en uno, ya que se suprime una integral de linea con el signo contrario a la que correspondería al borde del disco agregado y lo mismo se aplica a los ángulos de esa curva. El punto central de la demostración es que todo este proceso depende sólo de como se subdividió en discos la superficie original, y esa subdivisión puede trasladarse mediante un homeomorfismo, por lo que depende sólo de la clase de homeomorfía de la superficie.

Ejemplo 9.12. La demostración del resultado precedente nos dice como debe calcularse la característica de Euler de una superficie. En la figura 8.7. se muestran algunas superficies con su descomposición y característica correspondientes. Para el anillo o el cilindro, podemos calcular la característica de Euler mediante una subdivisión en dos discos que se pegan por dos segmentos, lo que dá una característica de Euler igual a 0 para cada una. De hecho estas dos superficies son homeomorfas. En el caso del toro, este puede cortarse en dos cilindros. Además, los círculos borde pueden escogerse como meridianos, los que son geodésicas, por lo que no contribuyen al cálculo de la característica. La esfera puede dividirse en dos discos, de modo que el borde también sea una geodésica. El toro perforado se obtiene del toro sustrayendo un disco, lo que hace que la característica disminuya en 1 (este truco puede usarse también para el anillo). El bitoro puede escribirse tambien como la unión de dos toros agujereados pegados por un círculo geodésico.

Ejemplo 9.13. Si se intenta aplicar el mismo procedimiento con la banda



Figura 9.7: Algunos cálculos de característica.

de

de Moebius, la que no es una superficie orientable (ver Figura 8.8), necesariamente se produce un "muro", donde las integrales de linea no se cancelan. Este muro puede ser una geodésica, pero aún así tendrá ángulos exteriores que influirán en el cálculo.



Figura 9.8: Gauss-Bonnet en la banda de Moebius.

Existe un método alternativo para calcular la característica de Euler de una superficie. Simplemente se subdivide esta en discos con borde poligonal, y se cuenta el número de caras, aristas y vértices así obtenidos. No afecta para nada el cáculo si los bordes de estos polígonos son curvos. En lenguaje técnico, se dice que se dota a la superficie con una estructura de complejo de celdas¹. Si estos números son C, $A \neq V$, respectivamente, definimos $\hat{\chi}(S) = C - A + V$. Si esta subdivisión se hace de manera que funcione bien con dos subsuperficies simultaneamente, se tiene una fórmula de adición del tipo

$$\hat{\chi}(S_1 \cup S_2) = \hat{\chi}(S_1) + \hat{\chi}(S_2) - \hat{\chi}(S_1 \cap S_2).$$

Es posible probar por inducción, como se pide en los ejercicios, que todo complejo conexo Σ sin agujeros contenido en el plano satisface $\hat{\chi}(\Sigma) = 1$. Esto es, por lo tanto, cierto para cualquier subdivisión de un disco, por lo que puede probarse, con un método similar al utilizado para demostrar la proposición precedente, que $\hat{\chi}(S) = \chi(S)$ para cualquier superficie orientable. Esta segunda definición, sin embargo, se aplica también a conjuntos que no son superficies, o a superficies no orientables. La banda de Moebius M, por ejemplo, satisface $\hat{\chi}(M) = 0$.

Ejercicios

- 1. Utilice el teorema de Gauss-Bonet para calcular la curvatura gaussiana de la esfera unitaria.
- 2. Un vértice de un poliedro se dice cóncavo si la suma de sus ángulos adyacentes es mayor a 2π . Probar que todo poliedro homeomorfo al bitoro (o esfera con dos asas) tiene al menos un vértice concavo.
- 3. Probar que para toda superficie homeomorfa al toro la curvatura gaussiana se anula en algún punto. Determine todos los puntos con dicha propiedad en el caso del toro de revolución obtenido girando un círculo sobre un eje exterior contenido en el mismo plano.
- 4. Calcule la característica de Euler de la superficie de género g, también llamada esfera con g asas (ver figura 8.9).
- 5. Los habitantes del universo bidimensional X han determinado que su universo tiene la forma de una esfera con g asas, que su curvatura K = -0,009 es constante y su area satisface 1900 < A < 2200. Encuentre g y A.
- 6. Una superficie con borde S tiene la forma de un bitoro del cual se han recortado dos discos como muestra la Figura 8.10. El area de S es de

¹La definición técnica de complejo de celdas es más general, de hecho, que la dada aquí. Si los polígonos son triángulos, lo correcto sería hablar de un complejo simplicial o de un Δ -complejo.



Figura 9.9: Una superficie de género g.



Figura 9.10: Un bitoro con dos agujeros.

 $\frac{\pi}{6}$ y su curvatura gaussiana es constante K = -7. Les circunferencias de borde α_1 y α_2 tienen largo $l_1 = \pi$ y $l_2 = 2\pi$, mientras que sus curvaturas geodésicas son constantes e iguales a $k_1 = 1 - r$ y $k_2 = 1 + r$ respectivamente. Encuentre el valor de r.

- 7. Cuál es la característica de Euler de la superficie que se obtiene al identificar los lados de un dodecágono regular como muestra la Figura 8.11? Sugerencia: Suponga que la figura es plana salvo en los vértices y utilice el Ejercicio 10 de la sección precedente.
- 8. Se identifican los lados de un dodecágono geodésico en el plano hiperbólico, en el mísmo orden que en el problema precedente, sin producir ningún defecto angular en sus vértices. Calcule su área.
- 9. Probar que si una superficie S se divide en dos superficies S_1 y S_2 con borde que se intersectan sólo en el borde común, entonces $\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$.
- 10. Demuestre por inducción la fórmula de Euler C + V A = 1 para



Figura 9.11: Un decágono con identificaciones.

cualquier complejo plano del tipo descrito en el texto. Se sugiere utilizar el ejercicio precedente.

Capítulo 10

Tensores y formas diferenciales

En este capítulo introduciremos algunas generalizaciones del concepto de campo vectorial que dimos en el capítulo 5. Para esto introduciremos el concepto de fibrado vectorial para luego definir el concepto de sección del fibrado, que generaliza la idea de campo vectorial. El concepto de tensor puede definirse como una sección de un producto tensorial de algunas copias del fibrado tangente y de su dual, lo que lo convierte en un caso particular del concepto anterior. La construcción del dual del fibrado tangente, también llamado el fibrado cotangente, requiere de una de las siguientes nociones:

- 1. El pegado de variedades.
- 2. El cociente de un fibrado por otro.

Cualquiera de estas nociones requiere de la definición de espacio topológico cociente, lo que está más allá de los límites de estas notas. Por esta razón preferimos utilizar una definición alternativa de un tensor como una función lineal que satisface una condición de localidad. En la tercera sección introducimos el concepto de forma diferencial como un tensor contravariante alternante. Esto limita las dificultades teóricas de estudiar el fibrado cotangente, al coste de requerir algo más de trabajo para demostrar que estos objetos tienen la interpretación que uno espera, ya que carecen de la interpretación como secciones. Este es un problema técnico que no tendrá mayores repercusiones en lo que sigue.
