AYUDANTÍA GEOMETRÍA nº 1

RECUERDO: RECTAS NOTABLES

• MEDIATRICES / SIMETRALES: la mediatriz de un "lado" (de un triángulo) corresponde a la recta que pasa perpendicularmente por el punto medio del lado.
Las 3 mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado "circuncentro".

• ALTURAS: una altura de un vértice de un triángulo corresponde a la recta que pasa por un vértice del triángulo e intercepta perpendicularmente al lado opuesto.
Las 3 alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado "ortocentro".

• MEDIANAS / TRANSVERSALES DE GRAVEDAD: una transversal de gravedad corresponde a la recta que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto del triángulo.
Las 3 medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado "baricentro"

• BICECTRICES: una bicectriz de un triángulo corresponde a la recta que pasa por un vértice y corta el lado opuesto.
Las bicectrices dividen el ángulo en 2 partes iguales
Las 3 bicectrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado "incentro".

PROBLEMA 1

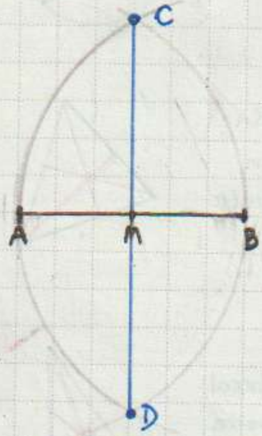
VISUALICE MEDIANTE PAPEL QUE:

a. LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO SUMAN 2R
b. LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA SE INTERSECTAN EN UN PUNTO (BARICENTRO)
c. LAS BICECTRICES DE UN TRIÁNGULO CUALESQUIERA SE INTERSECTAN EN UN PUNTO (INCENTRO)
d. LAS ALTURAS SE INTERSECTAN EN UN PUNTO (ORTOCENTRO)
e. LAS SIMETRALES SE INTERSECTAN EN UN PUNTO (CIRCUNCENTRO).

PROBLEMA 2

¿CUÁNDO UNA RECTA SE DICE SIMETRAL DE UN SEGMENTO $\overline{AB}$? INDIQUE COMO SE CONSTRUYE Y COMO SE CARACTERIZA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

Una recta ℓ es una simetral de $\overline{AB}$ si esta recta pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a este segmento



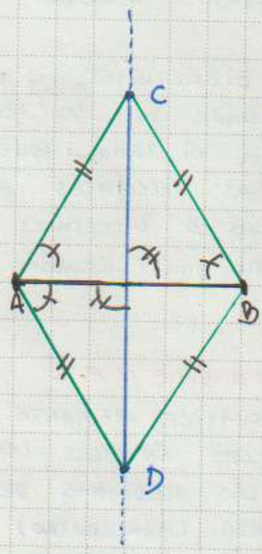
Para construirla, debemos primeramente encontrar el punto medio M de $\overline{AB}$, trazamos 2 circunferencias de radio $\overline{AB}$, una con centro en A y otra con centro en B.
(notación: $\odot(A, \overline{AB})$ y $\odot(B, \overline{AB})$).
Con esto, los puntos donde se intersectan las circunferencias las llamaremos C y D
Al trazar la recta $\overline{CD}$, esta cortará a $\overline{AB}$ en M.

PARA PROBAR QUE LA PROLONGACIÓN DE $\overline{CD}$ ES SIMETRAL, DEBEMOS PROBAR QUE:

PD1 | M ES PUNTO MEDIO

Trazamos las rectas $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$ (todas iguales por ser parte de triángulos equiláteros por la construcción).

a. $\Delta ADM \cong \Delta ACM$ (LAL)
- $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ (pues ΔABC y ΔADB equiláteros con un lado en común).
- $\measuredangle CAM \cong \measuredangle DAM$ (pues ΔABC y ΔADB equiláteros con un lado en común).
- $\overline{AM} = \overline{AM}$ (mismo lado)

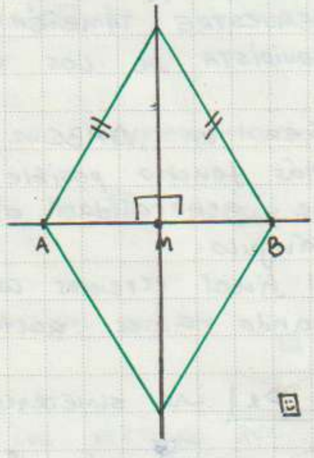


b. $\Delta AMD \cong \Delta CMB$ (ALA)
- $\measuredangle AMD \cong \measuredangle CMB$ (op. por el vértice)
- $\overline{CM} \cong \overline{DM}$ (por a. correspondientes de Δ'os congruentes).
- $\measuredangle MDA \cong \measuredangle BCM$ (ángulos internos de un triángulo suman 2R)

$\Rightarrow$ En particular $\overline{AM} \cong \overline{BM}$

$\therefore$ M ES PUNTO MEDIO DE $\overline{AB}$

$\underline{PD_2)}$ $\measuredangle AMC$ RECTO (sirve cualquiera, se complementan)
i.e. $\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMC$



$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ (LLL)

- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (por M punto medio)
- $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ (por $\triangle ABC$ equilátero)
- $\overline{CM} \cong \overline{CM}$ (mismo lado)

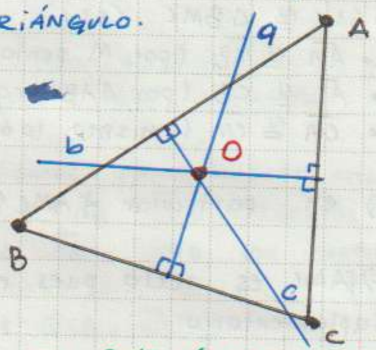
$\Rightarrow$ en particular $\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMC$

$\Rightarrow \measuredangle AMC$ es recto pues es igual a su suplementario

$\therefore$ POR $\underline{PD_1)}$ y $\underline{PD_2)}$ LA PROLONGACIÓN DE $\overline{CD}$ ES LA RECTA ℓ SIMETRAL DE $\overline{AB}$ QUE BUSCÁBAMOS

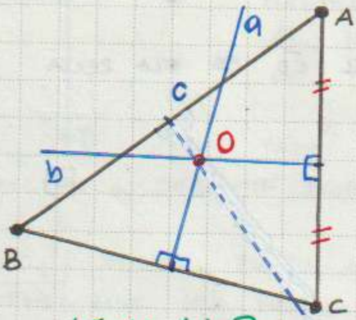
PROBLEMA 3

DEMUESTRE QUE LAS SIMETRALES DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO, SON RECTAS QUE CONCURREN EN UN PUNTO. DEMUESTRE TAMBIÉN QUE ESE PUNTO ES EL ÚNICO PUNTO QUE EQUIDISTA DE LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO.



Sea un $\triangle ABC$ cualquiera, el más feucho posible. Sin pérdida de generalidad asumémos acutángulo.
Al final veremos la diferencia cuando no es acutángulo

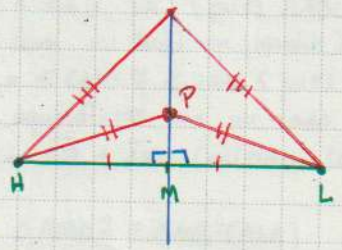
PD1 | LAS SIMETRALES CONCURREN EN UN PUNTO (CIRCUNCENTRO)



Sabemos que 2 rectas (no paralelas) deben concurrir en un punto (postulado 5), tomemos S.P.G las simetrales a y b concurren en O.

Queremos mostrar que c también pasa por O.

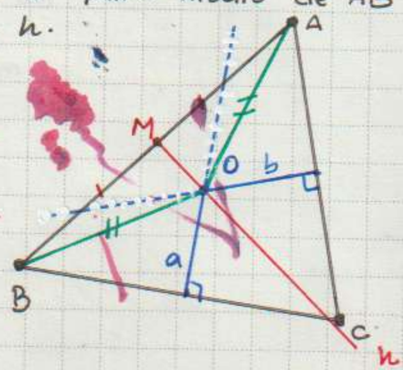
LEMA 1 | PARA UN SEGMENTO $\overline{HL}$ CUALQUIERA, SU SIMETRAL CUMPLE LA PROPIEDAD DE QUE TODOS LOS PUNTOS QUE LA COMPONEN EQUIDISTAN DE LOS EXTREMOS DE ESTA.



DEM | por LAL $\triangle HMP \cong \triangle LMP$
- $\overline{HM} \cong \overline{LM}$ (pues M punto medio)
- $\measuredangle HMP \cong \measuredangle LMP$ (Los 2 son R)
- $\overline{PM} = \overline{PM}$ (pues es la misma)

$\Rightarrow \overline{HP} \cong \overline{LP} \quad \forall P \in$ a la simetral.

Trazar la recta que pasa por M, el punto medio de $\overline{AB}$ y por O. Digamos esta es la recta h.



¿Es h simetral? Debemos mostrar que $\measuredangle AMO \cong \measuredangle BMO$, como son suplementarios, $\Rightarrow$ son rectos

Por el lema 1) $\overline{BO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{AO} \cong \overline{CO}$
luego por principio general (transitividad), $\Rightarrow \overline{BO} \cong \overline{AO}$

$\Rightarrow \Delta BOM \cong \Delta AOM$ (LLL)

- $\overline{BO} \cong \overline{AO}$ (por LEMA 1|)
- $\overline{BM} \cong \overline{AM}$ (pues M es punto medio de $\overline{AB}$)
- $\overline{OM} \cong \overline{OM}$ (es el mismo segmento).

$\Rightarrow$ En particular $\measuredangle AMO \cong \measuredangle BMO$, como son suplementarios
$\Rightarrow \measuredangle AMO$ es recto.
$\Rightarrow$ La prolongación de $\overline{MO}$ es la simetral de $\overline{AB}$ (porque pasa por M y es recto

$\therefore$ Las simetrales de un Δ concurren en un punto. $\blacksquare$

PD2| ES EL ÚNICO PUNTO QUE EQUIDISTA DE LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO.

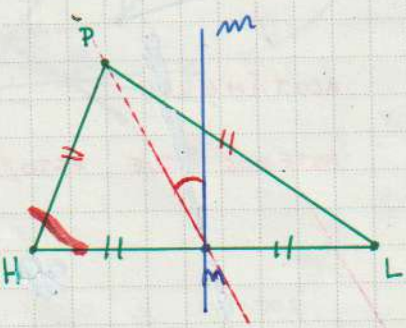
Primero, es fácil notar que O equidista de los vértices, por LEMA 1|. Veamos otro lemita antes de seguir con la demostración para ver que es único.

LEMA 2| RECÍPROCO DEL LEMA 1
"SI UN PUNTO EQUIDISTA DE LOS EXTREMOS DE UN SEGMENTO, ENTONCES DICHO PUNTO PERTENECE A LA SIMETRAL".
(SI $\overline{HP} \cong \overline{PL}$ EQUIDISTAN $\Rightarrow m$ SIMETRAL)

DEM| "$\overline{PM} \in m$ en particular $P \in m$ i.e. $\measuredangle PMH$ recto, si no lo fuera habría un angulito entre $\overline{PM}$ y m" ← Por Demostrar.

$\Delta PMH \cong \Delta PML$ (LLL)

- $\overline{HM} \cong \overline{LM}$ (por M punto medio)
- $\overline{HP} \cong \overline{PL}$ (por hipótesis)
- $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ (mismo segmento)



$\Rightarrow \measuredangle HMP \cong \measuredangle LMP$ y como son suplementarios
$\Rightarrow \measuredangle PMH$ es recto $\blacksquare$

Con esta información volvemos al problema, supongamos existe $O' \neq O$ tal que O' equidista de los vértices.

Trazamos la altura en O' del $\Delta BO'C$, como $\overline{BO'} = \overline{O'C}$, por LEMA 2| $\overline{O'E}$ es simetral (pues por hipótesis equidista de B y C y es perpendicular por construcción).

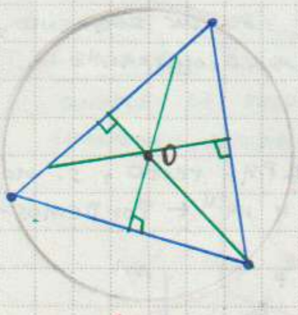
Pero $\overline{OD}$ ya era la simetral del lado $\overline{BC}$
$\Rightarrow \overline{O'E} = \overline{OD}$ (si se quiere $O' = O$ $\rightarrow\!\!\!\times$)

Análogamente los otros 2 casos para las otras 2 simetrales.

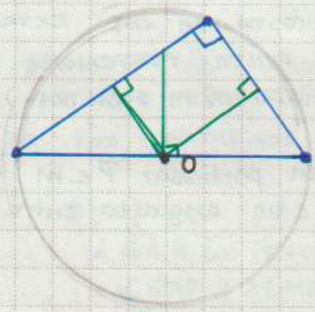
$\therefore$ EXISTE UN ÚNICO PUNTO QUE EQUIDISTA DE LOS VÉRTICES DE UN Δ, Y ESTE PUNTO ES O, CIRCUNCENTRO.

EJERCICIO| Hacer la demostración pero suponiendo que el ángulo es recto y llegando a que deben medir lo mismo

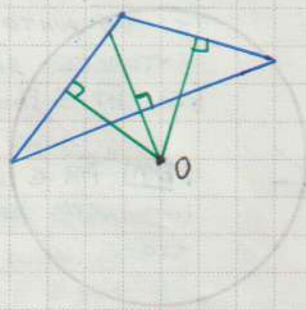
OBS| NOTEMOS QUE EL CIRCUNCENTRO SE LLAMA ASÍ, PUES ES EL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA. DEPENDIENDO DE CÓMO ES EL Δ' ESTA SE VERÁ ASÍ



ACUTÁNGULO



RECTÁNGULO



OBTUSÁNGULO

NOTEMOS QUE ESTO NO AFECTABA LA DEMOSTRACIÓN.