Ayudantia 22

November 2021

Conjuntos densos

En un espacio topologico X, un subconjunto A es denso si

$$\overline{A} = X$$

En un espacio metrico, esto es equivalente a

Conjunto denso I

Para todo $x \in X$ y todo $\delta > 0$ existe $a \in A$ tal que $a \in B(x, \delta)$

Conjunto denso II

Para todo $x \in X$ existe una sucesion $a_n \in A$ tal que $x = \lim_{n \to \infty} a_n$

Ayudantia

En un espacio normado, al estar definida la distancia mediante la norma $\| \cdot \|$, podemos añadir otra afirmacion equivalente

Conjunto denso espacios normados

Para todo $x \in X$ y todo $\delta > 0$ existe $a \in A$ tal que $\|a - x\| < \varepsilon$

Un ejemplo de un conjunto denso es el conjunto $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$. Podemos extender este ejemplo a otros ejemplos de conjuntos densos en espacios normados

Densidad

El conjunto $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$

eligiendo un racional a distancia $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ en cada coordenada

Densidad

El conjunto

$$\{(x_1, x_2, x_, \dots) \in l^p : x_i \in \mathbb{Q}\}$$

es denso en l^p

Todo conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es la union de conjuntos $B(x, \delta)$, por lo que la densidad de $\mathbb{Q}$ implica ademas que todo conjunto abierto contiene un racional. Dado $\varepsilon > 0$ y un elemento $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$, para cada n podemos elegir un racional a_n en $(x_n, x_n + (\frac{\varepsilon}{2^n})^{\frac{1}{p}})$ o $(x_n - (\frac{\varepsilon}{2^n})^{\frac{1}{p}}, x_n)$ de manera que $|a_n| < |x_n|$ y $|a_n - x_n| < (\frac{\varepsilon}{2^n})^{\frac{1}{p}}$

Ayudantia

Sea $a = (a_1, a_2, \dots)$ la sucesion formada por estos a_n. Esta sucesion esta en l^p pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

y cumple la condicion de densidad pues

$$\|x - a\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - a_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} ((\frac{\varepsilon}{2^n})^{\frac{1}{p}})^p = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ayudantia

Densidad

El conjunto

$$c_{00} = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^p : \text{ Existe } N \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para } n > N\}$$

es denso en l^p

Antes de demostrar que es denso, confirmaremos que es un subconjunto de l^p para todo $p < \infty$. Una sucesion $a \in c_0$ es nula excepto en una cantidad finita de coordenadas por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^p < \infty$$

pues la suma finita de valores finitos es un numero finito.

Ayudantia

Dado un $x \in l^p$ definimos $a^{(i)} \in c_0$ tal que $a_n^{(i)} = x_n$ si $n \leq i$ y $a_n^{(i)} = 0$ si $n > i$. Luego

$$\|x - a^{(i)}\|_p = \Big(\sum_{n=i+1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge, por lo que para todo ε existe N tal que

$$\|x - a^{(N)}\|_p = \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Ayudantia

Los conjuntos densos nos permiten aproximar vectores en un espacio normado por subconjuntos de este espacio, pudiendo reducir demostraciones de propiedades de los conjuntos de un espacio a una demostracion en un conjunto denso.
En el espacio L^p existen subconjuntos densos con propiedades geometricas utiles.

Densidad de funciones escalonadas

Para toda funcion $f \in L^p$ y $\varepsilon > 0$ existe una funcion escalonada φ tal que $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$

Densidad de funciones continuas

Para toda funcion $f \in L^p$ y $\varepsilon > 0$ existe una funcion continua ψ tal que $\|f - \psi\|_p < \varepsilon$

Ayudante

Para demostrar esto usaremos un lema

Densidad de funciones acotada

Para toda funcion $f \in L^p$ y $\varepsilon > 0$ existe una funcion medible f_M tal que $\|f - f_M\|_p < \varepsilon$ y $|f_M| < M$

Definimos

$$f_N(x) = \begin{cases} N\chi_{[-N,N]}(x) \text{ si } f(x) > N \\ f(x)\chi_{[-N,N]}(x) \text{ si } -N \leq f(x) \leq N \\ -N\chi_{[-N,N]}(x) \text{ si } -N < f(x) \end{cases}$$

Cada una de esta funciones es acotada y la sucesion f_N converge a f

Ayudantia

la funcion $|f - f_N|^p$ converge a 0 c.t.p. y esta funcion es dominada por la funcion integrable $|f - f_N|^p \leq |f|^p$ y por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{N\to\infty} \int |f - f_N|^p \int = \lim_{N\to\infty} |f - f_N|^p = 0$$

por lo que para ε^p existe $M > 0$ tal que

$$\int |f - f_M|^p < \varepsilon^p$$

luego

$$\|f - f_M\| < \varepsilon$$

Ayudantia

Hemos demostrado una primer aproximacion de funciones en L^p por funciones acotadas y medibles. Podemos aproximar una funcion acotada por una funcion escalonada, lo que usaremos para demostrar

Densidad de funciones escalonadas

Para toda funcion $f \in L^p$ y $\varepsilon > 0$ existe una funcion escalonada φ tal que $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$

a partir de una de los proposiciones vistos en este curso semestre

Ayudantia

proposicion 3.22

Para toda funcion medible y casi finita f definida en un intervalo $[a, b]$, dados $\varepsilon >$ y $\delta >$ existen una funcion escalonada φ, una funcion continua ψ y un conjunto medible E con medida $mE < \delta$ tal que para $x \notin E$

$$|\varphi - f| < \varepsilon$$

$$|\psi - f| < \varepsilon$$

Ayudantia

Por el lema anterior, dado $\varepsilon > 0$ existe una funcion acotada f_M tal que $\|f - f_M\| < \frac{\varepsilon}{4M}$.
por la proposicion anterior existe un conjunto medible E de medida $mE < (\frac{\varepsilon}{4M})^p$ y una funcion escalonada φ tal que $|f_M - \varphi|$ fuera del conjunto E. Podemos usar estas cotas para separa una integral en dos partes que podemos acotar

$$\begin{aligned}
\|f_M - \varphi\|_p^p &= \int |f_M - \varphi|^p \\
&= \int_{E^c} |f_M - \varphi|^p + \int_E |f_M - \varphi|^p \\
&\leq (\frac{2M\varepsilon}{4M})^p + (\frac{2M\varepsilon}{4M})^p < (\frac{\varepsilon}{2})^p
\end{aligned}$$

Ayudantia

por la desigualdad triangular

$$\|f-\varphi\| \leq \|f-f_M\| + \|f_M-\varphi\| < \varepsilon$$