Ayudantia 22

November 2021

Funcionales lineales y el espacio dual

Trabajaremos en espacios vectoriales normados V. Un funcional lineal es una transformacion lineal $F : V \to \mathbb{R}$. El espacio vectorial de todo los funcionales lineales se conoce como el **espacio dual algebraico** V^*

Funcionales lineales y el espacio dual

El espacio V es tambien un espacio normado, el cual es un tipo de espacio topologico y metrico, por lo que definiremos un subespacio del espacio dual cuyos elementos seran continuos (estos cumplen una condicion equivalente a la continuidad de Lipschitz). Un funcional lineal es **acotado** si existe una constante M tal que para todo $x \in V$ $|F(x)| \leq M\|x\|$ (con la norma $\|\cdot\|$ de V). El espacio de funcionales lineales acotados V' se llama el **espacio dual topologico** o **espacio dual continuo**. En esta ayudantia usaremos el termino espacio dual para referirnos a este espacio

Funcionales lineales y el espacio dual

En el espacio dual V' podemos definir la norma

$$\|F\| = \sup_{x \in V} \frac{|F(x)|}{\|x\|}$$

Por lo que V' es un espacio vectorial normado.
Podemos normalizar x, definiendo $y = \frac{x}{\|x\|}$ para obtener

$$\|F\| = \sup_{x \in V} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{y \in V : \|y\| = 1} |F(y)|$$

Espacio dual del espacio euclideano

Empezaremos estudiando el espacio dual de $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana. Sera suficiente estudiar el dual algebraico pues

Proposicion

En $\mathbb{R}^n$ con la norma euclideana

$$(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)'$$

esto es, todo funcional lineal en $\mathbb{R}^n$ es acotado

Sabemos que es suficiente calcular la norma sobre los vectores y tal que $\|y\| = 1$. Si $y = (y_1, \ldots y_n)$ es un vector de norma euclideana 1, entonces $|y_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$

Espacio dual del espacio euclideano

Al evaluar un funcional F sobre y de norma 1, la linealidad implica

$$|F(y)| = |\sum_{i=1}^{n} y_i F(e_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i||F(e_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |F(e_i)|$$

los terminos $|F(e_i)|$ son un conjunto finito de valores en $\mathbb{R}$, por lo que existe un maximo M, luego

$$|F(y)| \leq 1 \cdot nM = \|y\| nm$$

por lo que F es un funcional acotada

Espacio dual del espacio euclideano

Sabiendo esto podemos describir el dual $\mathbb{R}^n$ empezando desde una perspectiva algebraica.
En un espacio vectorial de dimension finita n, una transformacion lineal esta determinada por los valores sobre la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, esto es, para un vector $a = (a_1, \ldots, a_n)$

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(e_i)$$

$F(e_i)$ es un valor real. Si definimos respecto a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ las funciones $\delta_i(e_j) = \delta_{ij}$, estas se extienden a un conjunto de funcionales lineales linealmente independientes tal que

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} F(e_i)\delta_i(x)$$

Espacio dual del espacio euclideano

Hemos encontrado una base de n elementos $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ tal que $F = (F(e_i), \ldots, F(e_n))$. Esto nos da un ejemplo de un teorema de representacion, un teorema que da una isometria explicita desde un espacio dual a otro espacio cuyos elementos conocemos. En este caso demostraremos

$$\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)'$$

tanto en un sentido algebraico como metrico y topologico

Espacio dual del espacio euclideano

Teorema de representacion de Riesz en $\mathbb{R}^n$

Para todo funcional lineal $F \in (\mathbb{R}^n)'$ existe un unico vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x) = < v, x >$$

y $\|F\| = \|v\|$ en las normas de sus respectivos espacios

Escribimos las coordenadas de F en la base $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ para obtener $F = (F(e_i), \ldots, F(e_n))_{\delta_i}$. Definimos el vector $v \in \mathbb{R}^n$ en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mediante estas coordenadas, esto es, $v = (F(e_i), \ldots, F(e_n))_{e_i}$

Espacio dual del espacio euclideano

Sabemos que en la base $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ para un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} F(e_i)\delta_i(x) = \sum_{i=1}^{n} F(e_i)x_i\delta_i(e_i) = \sum_{i=1}^{n} F(e_i)x_i$$

y que la definicion del producto escalar es

$$< v, x >= \sum_{i=1}^{n} F(e_i)x_i$$

Si w es otro vector tal que $F(x) =< w, x >$, la linealidad del producto escalar implica

$$0 =< v, x > - < w, x >=< v - w, x >$$

por lo que $v - w$ es ortogonal a todo vector en $\mathbb{R}^n$, lo cual solo es cierto si $v - w = 0$, por lo que v es unico

Espacio dual del espacio euclideano

Falta ver que esta biyeccion es ademas una isometria, esto es, $\|F\| = \|v\|$.
Para esto usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$| < v, w > | \leq \|v\|\|w\|$$

la cual en $\mathbb{R}^n$ es una consecuencia de la interpretacion geomtrica del producto punto

$$< v, w >= \cos(\theta)\|v\|\|w\|$$

donde θ es el angulo entre v y W. Los unicos valores de θ para los cuales $|\cos(\theta)| = 1$ son 0 y π, por lo que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es igualdad solo si $w = av$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|F\| = \sup \frac{|<v,x>|}{\|x\|} \leq \|v\|$$

y sabemos que hay un vector para el que se obtiene la igualdad, especificamente

$$\frac{|<v,v>|}{\|v\|} = \|v\|$$

por lo que $\|F\| = \|v\|$

Este teorema de representacion es cierto en general para espacios **completos** con un **producto interno** y norma $\|v\|^2 =< v, v >$.
En estos espacios es cierta la desigualdad de Cauchy-Schwarz, lo que nos permite demostrar la isometria desde el espacio a su propio dual
Conocemos como ejemplos de este tipo de espacios a $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar, a L^2 con el producto

$$< f, g >= \int fg$$

y l^2 con el producto

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

En L^2 el teorema de representacion de Riesz es

Teorema de representacion de Riesz en L^2

Para todo funcional lineal $F \in (L^2)'$ existe un unico vector $g \in L^2$ tal que

$$F(f) = < g, f > = \int fg$$

y $\|F\| = \|g\|_2$

La desigualdad de Holder nos permite extender la desigualdad de Cauchy-Schwarz a pares de espacios L^p y L^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, por lo que podemos demostrar una isometria similar para estos espacios

La desigualdad de Holder nos permite extender la desigualdad de Cauchy-Schwarz a pares de espacios L^p y L^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, por lo que podemos demostrar una isometria similar para estos espacios

Teorema de representacion de Riesz en L^p

Para todo funcional lineal $F \in (L^p)'$ existe un unico vector $g \in L^q$ tal que

$$F(f) = < g, f > = \int fg$$

y $\|F\| = \|g\|_q$

Antes de empezar esta demostracion, determinemos los pasos que vamos a seguir

- Usaremos el **teorema fundamental del calculo** para demostrar la representacion en el caso de las funciones escalonadas
- Usaremos la **densidad de funciones escalonadas** en L^p para extender esta representacion a funciones L^p
- Usaremos el **lema 7** (visto en clases) para demostrar que $g \in L^q$
- Usaremos la **desigualdad de Holder** para demostrar que esta es una isometria

Ayudantia

Desigualdad de Holder

Si p y q son numeros reales no negativos (incluyendo la posibilidad de ser ∞) tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $f \in L^p$ y $g \in L^q$ entonces $fg \in L^1$ y

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

y la igualdad se cumple solo si $a|f|^p = b|g|^q$ para reales a y b

Teorema fundamental del calculo (Lebesgue)

La funcion F es absolutamente continua si y solo si existe una funcion f tal que

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Ayudantia

Lema 7

Sea g integrable y $M > 0$ una constante tal que

$$\int fg \leq M\|f\|_p$$

para toda funcion f medible y acotada. $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq M$

Densidad de funciones escalonadas

Para toda funcion $f \in L^p$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una funcion escalonada ψ tal que

$$\|d - \psi\|_p < \varepsilon$$

Ayudantia

Empezamos demostrando que en el caso de las funciones escalonadas $\chi_s = \chi_{[0,s]}$ existe una funcion g tal que

$$F(\chi_s) = \int \chi_s g = \int_0^s g$$

Definimos la funcion $\Phi(s) = F(\chi_s)$. Por el **teorema fundamental del calculo** la identidad $\Phi(s) = \int_0^s g$ equivale a que *Phi* sea absolutamente continua

Ayudantia

Demostraremos que $\Phi(s)$ es absolutamnete continua. Sea (a_i, b_i) subintervalos disjuntos de $[0,1]$. Por la linealidad del funcional acotado F

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\Phi(b_i) - \Phi(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |F(\chi_{b_i}) - F(\chi_{a_i})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |F(\chi_{b_i} - \chi_{a_i})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} sgn(\Phi(b_i) - \Phi(a_i))F(\chi_{b_i} - \chi_{a_i}) \\
&= F(\sum_{i=1}^{n} sgn(\Phi(b_i) - \Phi(a_i))(\chi_{b_i} - \chi_{a_i}))
\end{aligned}$$

Ayudantia

Llamamos a esta funcion $f = \sum_{i=1}^{n} sgn(\Phi(b_i) - \Phi(a_i))(\chi_{b_i} - \chi_{a_i})$ que esta en L^p pues es una combinacion lineal de funciones caracteristicas. La funcion f corresponde a las funciones caracteristicas de los intervalos (a_i, b_i) multiplicada por $sgn(\Phi(b_i) - \Phi(a_i)) = \pm 1$, luego

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f|^p = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Ayudantia

El funcional F es acotado, por lo que para toda funcion en L^p y en particular para f

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(b_i) - \Phi(a_i)| = |F(f)| \leq \|F\| \|f\|_p = \|F\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

luego, dado $\varepsilon > 0$ si $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{\|F\|}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(b_i) - \Phi(a_i)| < \varepsilon$$

por lo que Φ es absolutamente continua. Vimos por la definicion de Φ que si esta es absolutamente continua, existe una funcion g tal que

$$F(\chi_s) = \int_0^1 g\chi_s$$

Ayudantia

esta identeidad nos dice que la representacion es cierta en el caso de funciones escalonadas ψ, pues estan son combinaciones lineales de χ_s y la integral es lineal

Ahora extendemos esta representacion de funciones escalonadas ψ a funciones f medibles y acotadas, las cuales son elementos de todo espacio $L^p[0,1]$.
Por la densidad de funciones escalonadas en L^p, para cada funcion medible y acotada f y cada $\varepsilon > 0$ existe una funcion escalonada ψ_ε tal que

$$\|f - \psi_\varepsilon\|_p < \varepsilon$$

y estas funciones convergen puntualemnte a f

Ayudantia

El funcional F es acotado, por lo que cumple la condicion de lipschitz, lo que significa que es continuo, luego

$$\lim F(\psi_\varepsilon) = F(f)$$

y cada $\psi_\varepsilon g$ es acotado por $M|g|$ por lo que podemos usar el teorema de convergencia dominada

$$intpsi_\varepsilon g \to \int fg$$