

Tarea 5

22 de noviembre de 2021

Nota: $\frac{\text{Puntos}}{3} + 1$

Fecha de entrega: 3 de Diciembre

Todas las respuestas deben ser justificadas

Pregunta 1

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Demostrar que

$$\int f(x)dx = \int f(x+t)dx$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluir que si $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ entonces

$$f(t+x) \in L^p$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ **(6 puntos)**

Pregunta 2

Sea $c \subset l^\infty$ el espacio vectorial de sucesiones reales convergentes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Demostrar que c con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

es un espacio de Banach. **(6 puntos)**

Pregunta 3

Sea $g \in L^\infty$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L^p$, entonces $fg \in L^p$, la funcion $G : L^p \rightarrow L^p$ definida por $G(f) = gf$ es lineal y acotada y

$$\sup_{f \in L^p} \frac{\|G(f)\|}{\|f\|} = \|G\| = \|g\|_\infty$$

(6 puntos)