Ayudantia 20

26 de octubre de 2021

Hemos definido los espacios

$$L^p =$$

Ayudantia

Ejercicio

Sea $f(x) = x^\alpha$. Demostrar que $f \in L^p$ si y solo si $\alpha > -\frac{1}{p}$

Sea $\alpha \neq 1$. Calculamos la integral

$$\int_0^1 |x^\alpha|^p$$

la variable x tiene solo valores no negativos en $[0,1]$ por lo que $|x^\alpha| = x^\alpha$

$$\int_0^1 |x^\alpha|^p = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}} = (1+\alpha p)x^{1+\alpha p}|_0^1$$

Ayudantia

Si $\alpha < -\frac{1}{p}$ entonces $(1+\alpha p) < 0$ por lo que

$$\int_0^1 |x^\alpha|^p = (1+\alpha p)(1 - \lim_{x\to 0} x^{1-\alpha p}) = -1 \cdot -\infty$$

por lo que $x^\alpha \notin L^p$.
Si $\alpha > -\frac{1}{p}$ entonces $(1+\alpha p) > 0$ y

$$\int_0^1 |x^\alpha|^p = (1+\alpha p)(1-0) = 1+\alpha p$$

y $x^\alpha \in L^p$

Si $\alpha = \frac{1}{p}$ entonces

$$\int_0^1 |x^\alpha|^p = \log(1) - \lim_{x \to 0} \log(x) = -1 \cdot -\infty$$

por lo que $x^\alpha \notin L^p$.

Si $1 \leq r < s < \infty$ entonces $-\frac{1}{r} < -\frac{1}{s}$ por lo que $x^{-\frac{1}{s}} \notin L^s$ pero $x^{-\frac{1}{s}} \in L^r$ por lo que

corolario

Si $1 \leq r < s < \infty$ entonces $L^r \not\subset L^s$

Ayudantia

Hemos obtenido una relacion entre dos espacios L^r y L^s distintos cuando $r < s$, esto se debe a que si f es una funcion tal que para algun $x_0 \in [0, 1]$ esta tenga limite $f(x) \to \infty$ cuando $x \to x_0$. Una funcion como esta puede converger dentro de un espacio L^p pero mientras mas grande sea r mayor sera el crecimiento de $|f|^p$ y eventualemente puede no converger, el caso limite es L^∞, las funciones en este espacio son acotadas c.t.p.
Esto nos dice que pasa en una direccion, para determinar la relacion a medida que disminuye p usaremos la desigualdad de Holder

Ejercicio

Si $1 \leq r < s < \infty$ entonces $L^s \subset L^r$

Sea $f \in L^s$. Usaremos la desigualdad de Holder para relacionar las normas $\|\cdot\|_r$ y $\|\cdot\|_s$.
El numero $\frac{s}{r}$ es mayor a 1 por lo que podemos aplicar la desigualdad de Holder. Necesitamos una funcion en $L^{\frac{s}{r}}$. Sabemos que

$$\int_0^1 |f|^s < \infty$$

y a partir obtenemos que $|f|^r \in L^{\frac{s}{r}}$ pues

$$\int_0^1 ||f|^r|^{\frac{s}{r}} = \int_0^1 |f|^s < \infty$$

Ayudantia

Para usar la desigualdad de Holder, ademas de una funcion en $L^{\frac{s}{r}}$ necesitamos una segunda funcion en $L^{\frac{s}{s-r}}$. Para esto podemos usar la funcion caracteristica $\chi_{[0,1]}$, la cual esta en todo espacio L^p pues

$$\int_0^1 |\chi_{[0,1]}|^p = \int_0^1 \chi_{[0,1]} = \int_0^1 = 1$$

y toda funcion definida en el intervalo $[0,1]$ es igual a su producto con la funcion caracteristica $\chi_{[0,1]}$, luego

$$\int |f|^r = \|(|f|^r \chi_{[0,1]})\| \leq \|(|f|^r)\|_{\frac{s}{r}} \|\chi_{[0,1]}\|_{\frac{s}{s-r}} = (\int_0^1 |f|^s)^{\frac{r}{s}} \cdot 1$$