Ayudantia 21

2 de noviembre de 2021

Ayudantia

Hemos demostrado que los espacios L^p son completos. Para esto usamos la proposicion

proposicion

Un espacio normado es completo si y solo si toda serie absolutamente sumable es tambien sumable

En esta ayudantia veremos otros ejemplos de demostraciones de completitud en espacios normados

Ayudantia

Antes de empezar veamos de manera general que necesitamos para demostrar que un espacio es completo. Empezemos por la definicion de un espacio completo

Definicion

El espacio normado X es completo si para toda sucesion de Cauchy x_n existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

esto es, toda sucesion de Cauchy converge

Ayudantia

Viendo la definicion, podemos determinar que tenemos que empezar la demostracion con una funcion de Cauchy generica x_n. Luego usaremos propiedades del espacio X para construir un elemento x que creemos podria ser el limite de x_n. Finalmente demostramos que x_n converge a x.
En esta ayudantia haremos dos demostraciones de este tipo

ejercicio

Demostrar que $C[a, b]$ es un espacio de Banach (es completo)

Sea $f_n \in C[a, b]$ una sucesion de Cauchy. Queremos encontrar una funcion f a la cual esta sucesion converge
Fijamos un punto fijo $x_0 \in [a, b]$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $m, n > N$ entonces

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

por lo que la sucecion $f_n(x_0) \in \mathbb{R}$ es una sucesion de Cauchy. El espacio $\mathbb{R}$ es completo, por lo que $f_n(x_0)$ converge a un valor real al que llamaremos $f(x_0)$, definiendo asi una funcion f

Ahora queremos demostrar que $f \in C[a, b]$ y que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Si una sucesion de funciones continuas converge uniformemente a otra funcion, este limte es tambien una funcion continua, por lo que en este caso sera suficiente demostrar $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en norma $\| \cdot \|_\infty$, ya que esto es equivalente a convergencia uniforme.

Ayudantia

Volvemos a la desigualdad

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

para todo $x \in (0,1)$ y $n, m > N$ y fijamos n. Dado que para cada x $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que si $m > M$ entonces

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

luego, combinando ambas desigualdades, obtenemos

$$|f_n(x) - f(x)| - \varepsilon < |f_n(x) - f(x)| - |f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

sumando $\varepsilon > 0$ a ambos lados

$$|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

Ayudantia

Para cada $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio vectorial

$$l^p = \{\text{sucesiones } a_n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$$

en este espacio definimos la norma

$$\|a_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)$$

Ayudantia

Ejercicio

Demostrar que l^p es un espacio de Banach (es completo)

Sea $x_n \in l^p$ una sucesion de Cauchy. Cada elemento x_n es tambien una sucesion por lo que necesitaremos dos indices, $x_n = (a_n^1, a_n^2, \dots)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_n^i - a_m^i|^p = \|x_n - x_m\|_p^p < \infty$$

Ayudantia

Cada termino en la serie es positivo, por lo que si fijamos un i obtenemos que Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$

$$|a_n^i - a_m^i| < \frac{\varepsilon}{k}$$

esto es, la sucesion $(a_n^i)_n \in \mathbb{R}$ es de Cauchy. El espacio $\mathbb{R}$ es completo por lo que existe $a^i \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n^i = a^i$. Definimos la sucesion $x = (a^1, a^2, \dots)$.

Ayudantia

Falta demostrar que $x \in l^p$ y que $\lim_{n\to\infty}$ Sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$

$$|a_n^i - a_m^i|^p < \frac{\varepsilon}{k}$$

Fijamos n. Para cada uno de los primeros $i \leq k$ elementos de la sucesion, dado $\varepsilon > 0$ existe M_i tal que si $m > M_i$ entonces

$$|a_m^i - a^i|^p < \frac{\varepsilon}{k}$$

dado que existen finitos M_i, existe un maximo M tal que si $m > M$ entonces, dado que toda suma finita esta en l^p y podemosaplicar la desigualdad triangular

$$(\sum_{i=1}^{k} |a_n^i - a^i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{k} |a_n^i - a_m^i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{k} |a_m^i - a^i|^p)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon$$

esto se cumple para cada k y todos los terminos son positivos, por lo que la serie converge y

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_n^i - a^i|^p < \varepsilon$$

La sucesion $x - x_n = (a^i - a_n^i)$ esta en l^p y este es un espacio vectorial, por lo tanto $x = (x - x_n) + x_n \in l^p$. la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_n^i - a^i|^p < \varepsilon$$

es cierta para todo $\varepsilon > 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty}$, demostrando que el espacio l^p es completo.

Ayudantia

terminamos la ayudantia con un ejercicio sobre limites en L^p

Ejercicio

Si $f_n \to f$ in L^p $(1 \leq p < \infty)$ y g_n es una sucesion de funciones medibles tal que $|g_n| < M$ para todo n y $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ c.t.p. entonces $g_n f_n \to gf$ en L^p

Queremos demostrar que para todo $\varepsilon' > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces

$$\|g_n f_n - gf\|_p^p = \int |g_n f_n - gf|^p < \varepsilon'$$

empezamos sumando $0 = (g_n f - g_n f)$ y separando la norma con la desigualdad triangular

$$\|g_n f_n - gf\|_p \leq \|g_n f_n - g_n f\|_p + \|g_n f - fg\|_p$$

Sabemos que $|g_n| < M$ y que para $\varepsilon > 0$ existe N_1 tal que si $n > N_1$ entonces $\|f_n - f\| < \varepsilon$ por lo que podemos acotar el primer termino

$$\|g_n f_n - gf\|_p \leq \|g_n(f_n - f)\|_p + \|g_n f - fg\|_p \leq M\varepsilon + \left(\int_0^1 |g_n f - fg|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

sabemos que la ultima integral es finita pues $f \in L^p$. La queremos separar en dos partes que podamos acotar por $\varepsilon > 0$

por la continuidad absoluta de la integral, si $mE < \delta$ entonces

$$(\int_E |g_n f - fg|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Por el teorema de Egoroff, existe E tal que $mE < \delta$ y g_n converge uniformemente a g en E^c esto significa que para $\varepsilon > 0$ existe N_2 tal que si $n > N_2$ entonces

$$|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in E^c$

separamos la integral con la desigualdad triangular $\|g_n f - fg\|_p \leq \|\chi_E(g_n f - fg)\|_p + \|\chi_{E^c}(g_n f - fg)\|_p$ para $n > \max\{N_1, N_2\}$ ambas desigualdades se van a cumplir

$$\begin{aligned}
\|g_n f_n - gf\|_p &\leq \|g_n(f_n - f)\|_p + (\int_E |g_n f - fg|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_{E^c} |g_n f - fg|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M\varepsilon + \varepsilon + (\int_{E^c} |g_n - g|^p |f|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon(\int_{E^c} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\|f\|_p
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon' > 0$ sea $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{M+1+\|f\|_p}$, para todo $n > \max N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$

$$\|g_n f_n - gf\|_p < \varepsilon(M + 1 + \|f\|_p) = \varepsilon'$$