

Tarea 5

29 de octubre de 2021

Nota: $\frac{\text{Puntos}}{4} + 1$

Fecha de entrega: 22 de Noviembre

Todas las respuestas deben ser justificadas

Pregunta 1

Sea $1 \leq p < \infty$. Para el espacio L^p y la funcion $w(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ definimos la norma

$$\|f\|_w = \left(\int_0^1 w(x) |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Para esta funcion w definimos el espacio vectorial

$$L^p(w) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_0^1 w(x) |f(x)|^p dx < \infty\}$$

1. Demostrar que el espacio L^p con la norma $\|\cdot\|_w$ no es completo **(6 puntos)**
2. Demostrar que el espacio $L^p(w)$ con la norma $\|\cdot\|_w$ es completo **(6 puntos)**

Pregunta 2

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $t \in (0, 1)$. Determinar los valores de λ tal que para toda funcion $f \in L^p$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^\lambda} \int_0^t f(x) dx = 0$$

y para cuales valores de λ existen funciones $f \in L^p$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^\lambda} \int_0^t f(x) dx \neq 0$$

(6 puntos)

Pregunta 3

Sea $1 < p < \infty$ y $f_n \in L^p$ una sucesion de funciones que converge puntualmente a una funcion f en casi todas partes. Demostrar que si $f \in L^p$ y existe una constante $M > 0$ tal que $\|f_n\|_p < M$ para todo n entonces para toda funcion $g \in L^q$

$$\int fg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n g$$

(6 puntos)