Ayudantia 19

juanfranciscopenamiralles

October 2021

Ayudantia

Hemos visto en clases que en los espacios vectoriales $L^p = \{f : \int_0^1 |f|^p < \infty\}$ a cada funcion f le podemos asignar un valor positivo $\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p)^{\frac{1}{p}}$, a partir de las propiedades de la integral es facil demostrar que si consideramos a funciones iguales c.t.p. como representantes de una misma clase de equivalencia, esta funcion $\|\cdot\|_p$ cumple con tres de las propiedades que definen una norma, esto es

- $\|f\|_p \geq 0$
- $\|f\|_p = 0$ si y solo si $f = 0$ c.t.p.
- $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$

Ayudantia

Para que $\| \cdot \|_p$ sea una norma y L^p un espacio vectorial normado falta desmostrar que $\| \cdot \|_p$ cumple con la desigualdad triangular. En este contexto se le llama la desigualdad de Minkowski

$$(\int_0^1 |f+g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_0^1 |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_0^1 |g|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Usaremos esta ayudantia para demostrar la desigualdad de Minkowski. Antes de poder demostrar esta desigualdad debemos demostrar otras dos desigualdades

La primera desigualdad generaliza una relacion entre la media aritmetica y la media geometrica

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Al caso en que x e y tiene pesos diferentes

Lema

Sean x e y reales no negativos. Para cada $\lambda \in (0,1)$

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y$$

y la igualdad se cumple solo si $x = y$

Si $y = 0$ la desigualdad es cierta.
En el caso en que no sea 0, definimos la variable $t = \frac{x}{y}$ y la funcion (dependiente de un parametro λ)

$$\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^{\lambda}$$

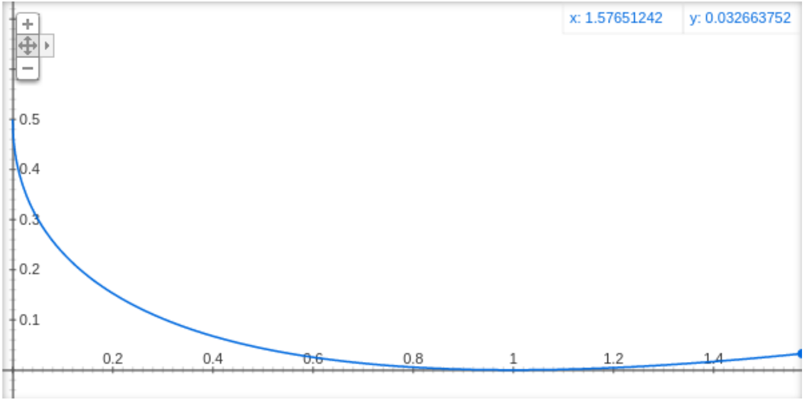

Figura: La funcion para $\lambda = \frac{1}{2}$

Derivamos esta funcion para mostrar que tiene un minimo en $t = 1$

$$\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$$

el exponente $\lambda - 1$ de la variable t es negativo, por lo que $t^{\lambda-1} > 1$ cuando $t < 1$, $t^{\lambda-1} < 1$ cuando $t > 1$ y $t^{\lambda-1} = 1$ si $t = 1$.
esto nos dice que φ es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$ luego,

$$\varphi(t) \geq \varphi(1)$$

la funcion φ es igual a 0 en el punto 1, por lo que

$$(1 - \lambda) + \lambda t - t^{\lambda} \geq 0$$

reordenamos esta desigualdad

$$(1-\lambda)+\lambda t \geq t^{\lambda}$$

y al reemplazar t por $\frac{x}{y}$ obtenemos la desigualdad.

$$x^{\lambda}y^{1-\lambda} \leq \lambda x+(1-\lambda)y$$

la cual solo es igualdad cuando $t=1$, esto es, $x=y$.

Ayudantia

Habiendo demostrada esta desigualda, podemos demostrar la desigualdad de Holder, la cual es una generalizacion de una desigualdad en $\mathbb{R}^n$ que relaciona al producto punto de dos vectores v y w con la norma euclidiana de estos vectores

$$| < v, w > | \leq \|v\|\|w\|$$

Esta desigualda es cierta en cualquier espacio vectorial con un producto escalar (usando la norma inducida), y nos permite demostrar la desigualdad triangular en estos espacios. De la misma manera, usaremos la desigualdad de Holder para demostrar la desigualdad de Minkowski en los espacios L^p

Desigualdad de Holder

Si p y q son numeros reales no negativos (incluyendo la posibilidad de ser ∞) tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ $f \in L^p$ y $g \in L^q$ entonces $fg \in L^1$ y

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

y la igualdad se cumplke solo si $a|f|^p = b|g|^q$ para reales a y b

Para $p=\infty$ y $q=1$ $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p. y este es un valor real por lo que

$$\int |fg| \leq \int \|f\|_\infty |g| = \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Veamos ahora el caso en que $1 < p < \infty$. Si $\|g\|_q = 0$ o $\|f\|_p = 0$ entonces la funcion $|fg|$ es 0 c.t.p. y la desigualdad es cierta, por lo que a partir de aca asumimos que $\|g\|_q > 0$ y $\|f\|_p > 0$

Hacemos primero el caso $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, pues si no estas funciones no tienen norma 1, las podemos normalizar multiplicando por un escalar. Aplicamos el lema anterior con $x = |f|^p$, $y = |g|^q$ y $\lambda = \frac{1}{p}$

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

integramos a ambos lado y al ser $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ obtenemos

$$\int |fg| \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q$$

por lo que la desigualdad es cierta.

En el caso en que las normas no son igual a 1, aplicamos la desigualdad obtenida a las funcion de norma 1 $\frac{f}{\|f\|_p}$ y $\frac{g}{\|g\|_q}$ y obtenemos

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |fg| \leq 1$$

y al multiplicar por $\|f\|_p\|g\|_q$ obtenemos la desigualdad de Holder. Ya que usamos el lema anterior para demostrar la desigualdad, la desigualdad de Holder solo sera igualdad cuando $x = y$, esto es $\frac{|f|^p}{\|f\|_p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q}$ lo cual equivale a que $|f|^p$ y $|g|^q$ sean linealmente dependientes en L^1

Desigualdad de Minkowski

Si $f, g \in L^p$ entonces

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ quedan como ejercicio pues la demostracion es diferente y mas facil.
Sabemos que

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p$$

aplicamos la desigualdad triangular a un de los factores $|f+g|$

$$\int |f+g|^p \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

para un p fijo podemos resolver la ecuacion $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y encontrar $q = \frac{p}{1-p}$ luego

$$\||f+g|^{p-1}\|_q = (\int |f+g|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}} = (\int |f+g|^p)^{\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} < \infty$$

por lo que $|f+g|^{p-1} \in L^q$ y podemos usar la desigualdad de Holder para ambos terminos en $\int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$

partimos con la desigualdad que ya habiamos obtenido

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \\
&\leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \text{ desigualdad de Holder} \\
&\leq \|f\|_p \|(|f+g|^{p-1})\|_q + \|g\|_p \|(|f+g|^{p-1})\|_q \\
&= \|f\|_p \|(f+g)\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|(f+g)\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|(f+g)\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}
$$

$\frac{p}{q} = p-1$ por lo que dividimos por $\|f+g\|_p^{p-1}$ a ambos lados

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$