

Ayudantia 17

8 de octubre de 2021

Una funcion f definida en un intervalo es Lipschitz continua si existe $M > 0$ tal que para todo par x, y

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

Geometricamente, esto significa que para todo x podemos contener la grafica de la funcion dentro de dos funciones lineales de pendiente M y $-M$ que se intersectan en $f(x)$, formando un cono

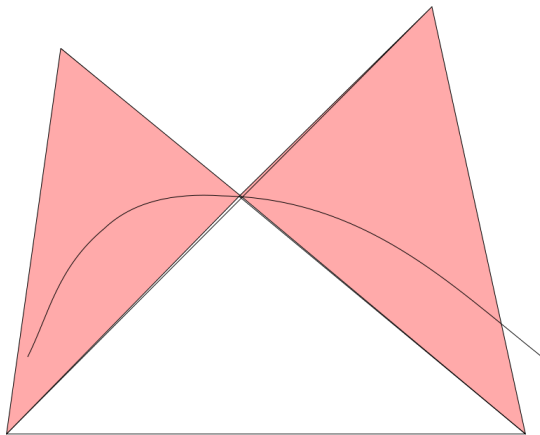


Figura: Una funcion de Lipschitz

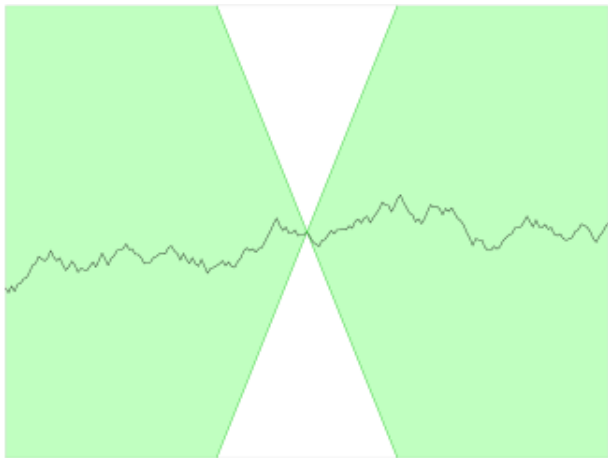


Figura: Otra funcion de Lipschitz

Ayudantia

Nos sera util estudiar las funciones Lipschitz continuas en el contexto de integrales y derivadas pues existen relaciones entre la continuidad de Lipschitz, la derivada de un funcion y la continuidad absoluta.

Ejercicio 1

Toda funcion de Lipschitz es absolutamente continua

La definicion de absolutamente continua requiere que para todo $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal que si

$$\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$$

para intervalos disjuntos (a_i, b_i) entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

La condicion de Lipschitz nos permite acotar esta ultima suma

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \sum_{i=1}^n M |b_i - a_i|$$

Si elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \sum_{i=1}^n M |b_i - a_i| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Ejercicio 2

Toda función f absolutamente continua es Lipschitz continua si y solo si $|f'|$ es acotada (f' existe c.t.p, no necesariamente en todo el intervalo)

Sea f Lipschitz continua. Existe M tal que para todo x y h

$$|f(x) - f(x + h)| < M|x - (x + h)|$$

luego

$$|f'| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(x + h)}{h} \right| < M$$

por lo que $|f'|$ es acotada.

Sea f una funcion absolutamente continua tal que $|f'| < M$ para algun $M > 0$. Al ser f absolutamente continua se cumple la siguiente ecuacion para cualquier par $x > y$

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'$$

Usamos la cota $-M < f' < M$ junto a la monotonia de la integral

$$\int_y^x -M < [f(x) - f(y)] < \int_y^x M$$

luego

$$|f(x) - f(y)| < M(x - y)$$

Finalmente, el siguiente teorema (el cual suele ser visto en cursos anteriores) nos ayudara a encontrar funciones absolutamente continuas

Ejercicio 3

Si f es continua y tiene derivada acotada $|f'| < M$ en todo el intervalo $[a, b]$ entonces es Lipschitz continua

Por el teorema del valor medio, para todo intervalo $[y, x] \subset [a, b]$ existe $c \in [y, x]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Acotamos $f'(c)$ por arriba y por abajo usando M

$$-M < \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < M$$

estas desigualdades equivalen a

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < M$$

luego

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

Podemos usar los ejercicios 1 y 3 para obtener

Corolario

Si f es continua y tiene derivada acotada $|f'| < M$ en todo el intervalo $[a, b]$ entonces es absolutamente continua

Podemos usar esto para demostrar, por ejemplo, que las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son absolutamente continuas en todo $\mathbb{R}$ y la función $\log(x)$ es absolutamente continua en un intervalo $[a, b]$ que no contenga a 0

Toda funcion Lipschitz continua es absolutamente continua y toda funcion absolutamente continua es de variacion acotada. Luego, la funcion $\sin(x^{-1})$, la cual no es de variacion acotada en $[0, 1]$, es un ejemplo de una funcion que no es de Lipschitz, pero si es continua.

Terminaremos esta ayudantia calculando la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{xe^{ax}}$$

cuando $a > 1$ con los metodos que hemos estudiado en las clases anteriores (teorema de convergencia monotona, teorema de convergencia dominada)

Para calcular esta funcion necesitamos la funcion gamma. A continuacion su definicion, junto a una ecuacion importante para esta funcion.

La funcion

$$t^{z-1}e^{-t}$$

es positiva para t en el intervalo $[0, \infty)$ y es continua, por lo que su integral de Lebesgue y de Riemann son iguales.

Definimos la funcion gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

Para $n \in \mathbb{N}$, usando integracion por partes podemos demostrar que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Ahora que hemos introducido la función $\Gamma(z)$ podemos calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{xe^{ax}}$$

Para $a > 1$. Primero escribimos $\sin(x)$ como su serie de Taylor

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

lo que nos da la serie

$$\frac{\sin(x)}{xe^{ax}} = \sum_{k=0}^{\infty} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} e^{-ax}$$

Vimos en una ayudantia anterior que si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| < \infty$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n$$

Calculamos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} e^{-ax} dx$$

Sacamos el factor constante $(2k+1)^{-1}$ de la integral y hacemos el cambio de variable $ax = t$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)! a^{2k+1}} \int_0^{\infty} t^{2k} e^{-t} dt$$

Esta integral es la funcion gamma de $2k + 1$ por lo que es igual a $2k!$ y se cancela con $(2k + 1)!$ en el denominador, quedando $2k + 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2k + 1)}{(2k + 1)! a^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1) a^{2k+1}}$$

La exponencial a^{2k+1} es eventualmente mayor que k^2 , por lo que la serie converge.

La diferencia entre $|f_n|$ y f_n es el factor $(-1)^k$, por lo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)a^{2k+1}}$$

Y esta ultima serie es la serie de Taylor de $\arctan(a^{-1})$ para $a > 1$ por lo que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{xe^{ax}} = \arctan(a^{-1})$$