

Tarea 4

8 de octubre de 2021

Nota: $\frac{\text{Puntos}}{4} + 1$

Fecha de entrega: 29 de Octubre

Todas las respuestas deben ser justificadas

Pregunta 1

Para constantes positivas α y β definimos $f_{\alpha,\beta}(0) = 0$ y $f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha \sin(\pi x^{-\beta})$. Demostrar que $f_{\alpha,\beta}$ es absolutamente continua si y solo si $\alpha > \beta$.

(6 puntos)

Pregunta 2

Demostrar que si f es absolutamente continua en $[a, b]$ entonces

$$T_a^b = \int_a^b |f'|$$

y

$$P_a^b = \int_a^b (f')^+$$

Dar un ejemplo donde esto no se cumple para una f que no es absolutamente continua.

(6 puntos)

Pregunta 3

Demostrar para $a > -1$

$$\int_0^1 \frac{x^a \log(x)}{1+x} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^2}$$

(6 puntos)

Pregunta 4

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion absolutamente continua con $a \leq 0 \leq b$. Demostrar que existe una unica funcion x absolutamente continua en $[a, b]$ tal que $x(0) = x_0$ y

$$x'(t) = \alpha(t)x(t) \text{ en casi todas partes}$$

y encontrar la funcion x como una funcion que depende de α .

(6 puntos)