Ayudantia 16

6 de octubre de 2021

Ayudantia

Hemos visto que la variacion total mide cuanto cambia verticalmente una funcion en un intervalo $[a, b]$
Si una funcion no es acotada su variacion no puede ser acotada pues fijando un punto $x \in [a, b]$ podemos encontrar un punto y tal que $|f(y)|$ es mucho mas grande que $|f(x)|$. A partir de esta idea escribimos una demostracion

Ejercicio

Si f es una funcion no acotada en el intervalo $[a, b]$ entonces f no es de variacion acotada

La funcion f no es acotada por lo que para todo n existe $x_n \in [a, b]$ tal que

$$|f(x_n)| > |f(a)| + n$$

y

$$|f(x_n)| > |f(b)| + n$$

Reordenamos ambas desigualdades

$$n < |f(x_n)| - |f(a)| < |f(x_n) - f(a)|$$

$$n < |f(x_n)| - |f(b)| < |f(x_n) - f(b)|$$

La variacion total T es el supremo de la variacion t para cada particion Q. Definimos la particion $Q_n = (y_0 = a, y_1 = x_n, y_2 = b)$ y llamamos t_n a la variacion de la particion Q_n

$$T = \sup_{Q \text{ particion de } [a,b]} t \geq t_n = \sum_{i=1}^{2} |f(y_1) - f(y_{i-1})| > 2n$$

esto es cierto para todo n por lo que $T = \infty$

Un ejempllo

Estudiemos la variacion de la funcion $\sin(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Sabemos que esta es una funcion periodica de periodo 2π y podemos dividir $\mathbb{R}$ en intervalos

$$[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$$

donde es creciente e intervalos

$$[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}]$$

donde es decreciente.
Sabemos que para una funcion f monotona en $[a, b]$ su variacion total T es $|f(a) - f(b)|$ por lo que la variacion total de $\sin(x)$ en cada una de esto intervalos es 2.

Podemos dividir cada intervalo $[a, b]$ en finitos subintervalos en los que $\sin(x)$ es creciente o decreciente y la variacion es menor o igual a 2. Si podemos demostrar que la variacion total en $[a, b]$ es igual a la suma de la variacion total en cada uno de estos intervalos, esto demostraria que $\sin(x)$ es una funcion de variacion acotada

Ejercicio

Si $a \leq c \leq b$ entonces $T_a^c + T_c^b = T_a^b$

Si $Q_1 = (x_0, \ldots, x_n)$ es una particion de $[a, c]$ y $Q_2 = (y_0, \ldots, y_m)$ es una particion de $[c, b]$ entonces

$$Q_3 = (z_0 = x_0, \ldots, z_n = x_n = y_0, z_{n+1} = y_1, \ldots, z_{m+n} = y_m)$$

es una particion de $[a, b]$ y

$$t_{Q_3} = t_{Q_1} + t_{Q_2}$$

Ayudantia

Sea $\mathcal{Q}_1$ el conjunto de particiones de $[a, c]$, $\mathcal{Q}_2$ el conjunto de particiones de $[c, b]$ y $\mathcal{Q}_3$ el conjunto de particiones de $[a, b]$. La ecuacion anterior implica

$$\{t_{Q_1} : Q_1 \in \mathcal{Q}_1\} + \{t_{Q_2} : Q_2 \in \mathcal{Q}_2\} \subset \{t_{Q_3} : Q_3 \in \mathcal{Q}_3\}$$

La variacion t para una particion Q es un numero real por lo que estos son conjuntos de valores reales. Al aplicar el supremo a ambos lados

$$T_a^c + T_c^b \leq T_a^b$$

Ayudantia

Sea $Q = (x_0, \ldots, x_n)$ una particion de $[a, b]$ si ninguno de los $x_i = c$ entonces existe x_i tal que $c \in (x_i, x_{i+1})$. La particion $Q' = (x_0, \ldots, x_i, c, x_{i+1} x_n)$ tiene variacion mayor o igual a Q pues por la desigualdad triangular

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq |f(x_{i+1} - f(c))| + |f(c) - f(x_i)|$$

y los otros terminos de la suma son iguales para ambas particiones

Ayudantia

Sea $Q = (x_0, \ldots, x_n)$ una particion de $[a, b]$ tal que para un k $x_k = c$. Existe una particion $Q_1 = (x_0, \ldots, x_k)$ de $[a, c]$ y una particion $Q_2 = (x_k, \ldots, x_n)$ de $[c, b]$ por lo que

$$t_Q = t_{Q_1} + t_{Q_2} \leq T_a^c + T_c^b$$

tomamos el supremo de t_Q

$$T_a^b \leq T_a^c + T_c^b$$

Ejercicio

Sea f una funcion de variacion acotada en $[a, b]$. Demostrar que

$$\int |f'| \leq T_a^b$$

Sabemos que si f es de variacion acotada las funciones monotonas $g(x) = P_a^x$ y $h(x) = N_a^x$ tienen valores reales en todo el intervalo $[a, b]$ y $f = g - h + f(a)$. Estas tres funciones son diferencibles c.t.p. Integramos

$$\int |f'| \leq \int |g'| + |h'|$$

Las funciones h y g son crecientes, por lo que sus derivadas D_-, D^-, D_+ y D^+ son positivas para todo x (Ejercicio:comprobar)

Ayudantia

Podemos acotar la integral de la derivada de un funcion creciente por la diferencia en sus extremos

$$\int |f'| \leq (g(b) - g(a)) + (h(b) - h(a)) = P_a^b + N_a^b - P_a^a - N_a^a = T_a^b - T_a^a$$

$T_a^a = 0$ y la demostracion esta completa.

Sabemos que todas las funciones de variacion acotada son diferenciables c.t.p, pero hay funciones diferenciables c.t.p que no son de variacion acotada

Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = x\sin(x^{-1})$ para $x \neq 0$. estudairemos esta funcion en un intervalo que contenga a 0, por ejmplo $[0, \frac{2}{\pi}]$.

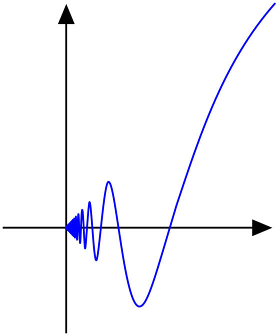

Figura: La funcion f

Ayudantia

La funcion $\sin(x)$ es igual a 1 cuando $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ y es igual a -1 cuando $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. En el intervalo $[0, \frac{2}{\pi}]$ la variable x^{-1} toma estos valores infinitas veces.

Sea $x_n = (k\pi + \frac{\pi}{2})^{-1}$. Esta sucesion alterna entre los maximos y minimos de f en $[0, \frac{2}{\pi}]$. Calculamos la variacion de una particion usando los primeros n terminos de la serie sobre el subintervalo $[x_n, x_0]$. Definimos la particion $Q_n = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 = \frac{2}{\pi})$

$$\begin{aligned} t_{Q_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |(k\pi + \frac{2}{\pi})^{-1} + ([k+1]\pi + \frac{\pi}{2})^{-1}| \\ &> \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Ayudantia

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

diverge, lo cual podemos demostrar comparandola con la serie armonica, por lo tanto sus sumas parciales no son acotadas, luego la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi + \frac{\pi}{2}} < t_{Q_n} \leq T_{x_n}^{x_0} \leq T_0^{2/\pi}$$

implica que f no tiene variacion acotada.

Ayudantia

A pesar de que f no tiene variacion acotada en ningun intervalo $[0, b]$, podemos adaptar la demostracion de que $\sin(x)$ tiene variacion acotada para demostrar que f tiene variacion acotada en todo intervalo $[a, b]$ con $a > 0$