Ayudantia 15

1 de octubre de 2021

Ayudantia

Teorema de Lusin

Sea f una funcion medible en el intervalo $[a, b]$. Para todo $\delta > 0$ existe una funcion continua g tal que
$m\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\} < \delta$

Sabemos que en un conjunto compacto una sucesion de funciones continuas que converge de manera uniforma converge a una funcion continua.

Ayudantia

Va necesario usar dos cotas, por lo que contruiremos una sucesion f_n que converge a f excepto en un conjunto A de medida $\frac{\delta}{2}$
Sabemos que para una funcion medible y un real $\varepsilon > 0$ existe una funcion continua g tal que $|f - g| < \varepsilon$ excepto en un conjunto A_ε de medida menor a ε. Sea f_n una funcion continua tal que

$$|f - f_n| < \frac{\delta}{2}\frac{1}{2^n}$$

Excepto en un conjunto A_n tal que $mA_n < \frac{\delta}{2}\frac{1}{2^n}$

Sea $A = \bigcup A_n$. La medida de A esta acotada

$$mA < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{\delta}{2}$$

y f_n converge uniformemente a f en $[a, b] \setminus A$.
El conjunto $[a, b] \setminus A$ es medible por lo que existe un conjunto cerrado $K \subset ([a, b] \setminus A) \subset [a, b]$ tal que $m([a, b] \setminus A) \setminus K < \frac{\delta}{2}$ y K es compacto porque $[a, b]$ es compacto.
Calculamos $m[a, b] \setminus K$

$$m[a, b] \setminus K = m([a, b] \setminus A) \setminus K + m(A) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Ayudantia

Hemos encontrado un conjunto K tal que

- $m[a,b] \setminus K < \delta$
- $f = \lim f_n$
- f_n converge uniformemente y K es compacto por lo que f es continua en K

Falta demostrar que podemos extender una funcion continua en K a una funcion continua en $[a,b]$. Definimos $g = f$ en K. El conjunto K^c es abierto por lo que podemos escribirlo como la union de intervalos abierto y disjuntos. En cada uno de estos intervalos definimos g como la funcion lineal conectando los valores en cada extremos de estos intervalos. La funcion g es continua en $[a,b]$ e igual a f en K

Ayudantia

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ una funcion tal que $f(x, t)$ es integrable para cada t. Si existe una funcion integrable $g(x)$ tal que $|f(x, t)| < g(x)$ para todo par (x, t) y $f(x, t)$ es continua para todo x entonces la funcion

$$F(t) = \int f(x, t)\mathrm{d}x$$

es continua

En este ejercicio vemos que la condicion $|f(x, t)| < g(x)$ para todo par (x, t) nos permite usar el teorema de convergencia dominada pero a diferencia de problemas que hemos visto antes, la variable t no es discreta. Tendremos que contruir una sucesion para aplicar este teorema.

Ayudantia

Queremos demostrar la continuidad de la funcion F y sabemos que una funcion es continua si y solo si $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$ para toda sucesion x_n que converge a x. Dado $t_0 \in [a, b]$ sea t_n una sucesion que converge a t_0. La funcion $f_{t_n}(x) = f(x, t_n)$ esta acotada por $|f_{t_n}(x)| < g(x)$ para todo t_n por lo que podemos usar el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_{t_n}(x)\mathrm{d}x = \int \lim_{n\to\infty} f_{t_n}(x)\mathrm{d}x$$

La funcion $f(x, t)$ es continua en la variable t por lo que para toda sucesion t_n y todo x es cierto que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n, x) = f(t_0, x)$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \int \lim_{n\to\infty} f_{t_n}(x)\mathrm{d}x = \int f(t_0, x)\mathrm{d}x = F(t_0)$$

Esto es cierto para todo $t_0 \in [a, b]$ y toda sucesion que converge a t_0, por lo que $F(t)$ es continua

Ejercicio

Demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t = \int_1^\infty e^{-t} \log t$$

Para demostrar esta igualdad podemos usar el teorema de convergencia dominada o el teorema de convergencia monotona. En esta ocasion usaremos el teorema de convergencia monotona. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}$$

por lo que basta demostrar que esta sucesion es creciente.

Ayudantia

Llamemos $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$ Dado que integramos en el intervalo $[1, n]$ podemos asumir que $t < n$ (el punto 1 tiene medida 0). Desarrollamos esta fraccion

$$f_n(t) = (\frac{n - t}{n})^n$$

$$f_{n+1}(t) = (\frac{n + 1 - t}{n + 1})^{n+1}$$

Vemos que en ambos casos (ignorando la potencia) el numerador es igual al denominador menos t. Podemos usar esta relacion para contruir una funcion g_n que relacione a f_n con f_{n+1}

Ayudantia

Para definir esta funcion g_n intercambiamos el denominador de f_{n+1} por el numerador de f_n y obtenemos

$$g_n(t) = \frac{(n+1-t)^{n+1}}{(n-t)^n}$$

$$g_n(0) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n)^n}$$

Ahora podemos usar g_n para demostrar que la sucesion f_n es creciente pues $f_n \leq f_{n+1}$ si y solo si $g_n(0) \leq g_n(t)$

Ayudantia

Podemos comprobar esta desigualda derivando

$$g_n'(t) = \frac{n(n-t)^{n-1}(n+1-t)^{n+1} - (n+1)(n+1-t)^n(n-t)^n}{(n-t)^{2n}}$$

Podemos factorizar el numerador por $(n-t)^{n-1}(n+1-t)^n$ y obtenemos

$$g_n'(t) = \frac{t(n-t)^{n-1}(n+1-t)^n}{(n-t)^{2n}}$$

esta derivada es positiva para $t < n$ por lo que $g_n(0) \leq g_n(t)$ y posemos usar el teorema de convergencia monotona para demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t = \int_1^\infty e^{-t} \log t$$