

Tarea 3

27 de septiembre de 2021

Nota: $\frac{\text{Puntos}}{4} + 1$

Fecha de entrega: 8 de Octubre

Todas las respuestas deben ser justificadas

Pregunta 1

Calcular

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx$$

4 puntos

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n + nx^2}\right) dx$$

4 puntos

Pregunta 2

Demostrar

1. Sea $t \in \mathbb{R}$, f integrable, g medible y acotada entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[g(x) - g(x+t)] dx = 0$$

4 puntos

2. Sea $f : \mathbb{R} \times [a, b]$ tal que $f(x, t)$ es integrable para todo $t \in [a, b]$. Si la derivada $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe para todo (x, t) y existe una función integrable $g(x)$ tal que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ para todo (x, t) entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(x, t) dx = \int \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

6 puntos

Pregunta 3

Una función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es medible e integrable si y solo si $\text{Re}h$ y $\text{Im}h$ son funciones medibles e integrables. En este caso definimos

$$\int h = \int \text{Re}h + i \int \text{Im}h$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int f(x) e^{-\alpha i x} dx = 0$$

6 puntos