Ayudantia 13

Juan Francisco Peña Miralles

21 de septiembre de 2021

Ayudantia

Para usar el teorema de convergencia dominada, es necesario encontrar una funcion que domine a la sucesion f_n y encontrar el limite de f_n.
Para esto seran util conocer cotas de las funciones exponenciales, polinomiales, logaritmo y funciones trigonometricas. A continuacion algunos ejemplos

$$|\sin x| \leq 1$$

$$|\cos x| \leq 1$$

$$\log(x+1) \leq x \text{ para } x > 0$$

$$1 + x^a \leq (1+x)^a \text{ para } a > 1$$

Ayudantia

Tambien es importante poder comparar el crecimiento de estas funciones. Sean $b, a > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a(x+1)}{x} = 0$$

Algunas de estas relaciones se demuestran usando la regla de L'Hopital.

Estar relaciones son transitivas. Por ejemplo, el crecimiento lineal es mucho mayor que el logaritmico y el crecimiento exponencial es mucho mayor que el crecimiento lineal, por lo tanto, el crecimiento exponencial tambien es mucho mayor que el logaritmico

Ejercicio

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n}$$

La sucesion $f_n(t) = \frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n}$ es una sucesion de funciones continuas, por lo que tambien es una sucesion de funciones medibles.
La funcion $1+nt^2$ tiene crecimiento lineal respecto a n. La funcion $(1+t^2)^n$ tiene crecimiento exponencial respecto a n. A partir de esto deducimos que el limite deberia ser igual a 0, ahora tenemos que demostrarlo.

Primero demostraremos que f_n es decreciente

$$f_n = \frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n} = \frac{(1+nt^2)(1+t^2)}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$f_{n+1} = \frac{1+(n+1)t^2}{(1+t^2)^{n+1}}$$

Hemos igualado los denominadores. Al comparar los numeradores vemos que

$$(1+nt^2)(1+t^2) = 1+(n+1)t^2 + nt^4 \geq 1+(n+1)t^2$$

por lo que $f_n \geq f_{n+1}$

Para todo n la funcion es no negativa, luego

$$|f_n| = f_n \leq f_1 = 1$$

y 1 es integrable en $[0, 1]$ por lo que podemos usar el teorema de convergencia dominada.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1 + nt^2}{(1 + t^2)^n} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{1 + nt^2}{(1 + t^2)^n}$$

Siguiendo nuestra deduccion inicial, intentaremos demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n} = 0$

$$\frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{(1+t^2)^n} + t^2\frac{n}{(1+t^2)^n}$$

La variable t es mayor a 0 en casi todo el intervalo $[0,1]$ por lo que $1+t^2 > 1$ y la funcion $\frac{x}{a^x}$ es continua, por lo que para $t \in (0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} + t^2\frac{n}{(1+t^2)^n} = 0$$

Ejercicio

Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$$

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x}\sin(\frac{x}{n})=1$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Si existe una funcion que domine esta sucesion podemos usar el teorema de convergencia dominada

Sabemos que

$$|\cos x| \leq 1$$

luego, por la monotonia de la integral, para $x > 0$

$$|\sin x| = |\int_0^x \cos y \mathrm{d}y| \leq \int_0^x |\cos y| \mathrm{d}y \leq \int_0^x \mathrm{d}y = x$$

luego

$$|\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}| \leq \frac{n|\frac{x}{n}|}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

esta ultima funcion es integrable.

Ejercicio

Sean $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ y $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ integrables. Si

$$|f_n| \leq g_n$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

Usaremos el lema de Fatou. Este solo se puede aplicar a sucesiones de funciones no negativas f_n puede tener valores positivos y negativos.

Ayudantia

La desigualdad $|f_n| \leq g_n$ nos permite definir las sucesiones de funciones no negativas

$$g_n - f_n$$

y

$$g_n + f_n$$

cuyos limites son tambien no negativos. Usamos el lema de Fatou para las funciones $g - f$ y $g + f$ y obtenemos

$$\int g + \int f \leq \liminf \int g_n + f_n$$

$$\int g - \int f \leq \liminf \int g_n - f_n$$

Ayudantia

En general, el limite inferior no es lineal, por lo que no podemos separar esta suma. En este caso, uno de los limites converge, por lo que si podemos separar la suma de limites

$$\int g + \int f \leq \liminf \int g_n + f_n = \int g + \liminf \int f_n$$

$$\int g - \int f \leq \liminf \int g_n - f_n = \int g + \liminf - \int f_n$$

luego

Ayudantia

Para una sucesion x_n los limites superior e inferior cumplen la identidad

$$\liminf(-x_n) = -\limsup(x_n)$$

por lo que

$$\int f \leq \liminf \int f_n$$

$$-\int f \leq -\limsup \int f_n$$

lo cual equivale a

$$\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n$$