Ayudantia 6

Juan Francisco Peña Miralles

16 de septiembre de 2021

Ayudantia

La funcion de Cantor f es creciente y $f(C) = [0, 1]$.
Demostraremos que es continua.
Fuera del conjunto de Cantor la funcion es constante dentro de un intervalo abierto y por lo tanto continua.

Ayudantia

Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in C$. La serie geometrica converge, por lo que existe N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Si a esta en el interior de una de la particiones A_n existe $\delta > 0$ tal que si $|b - a| < \delta$ entonces b esta en el interior del mismo intervalo por lo que $b_n = a_n$ para $n \leq N$

Ayudantia

Dadas sucesiones a_n y b_n representando a y b en base 3, sean a'_n y b'_n representaciones en base 2. La diferencia de las funciones es

$$|f(a) - f(b)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n - b'_n}{2^n}| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a'_n - b'_n}{2^n}|$$

los valores de a'_n y b'_n pueden ser 1 o 0 por lo que

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a'_n - b'_n}{2^n}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\frac{a'_n - b'_n}{2^n}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Si a esta en uno de los extremos de los intervalos de la particion A_n, una bola abierta alrededor de a se divide en una vecindad dentro del interior del intervalo y una vecindad fuera del conjunto de Cantor, por lo que la funcion es continua en a.

Ejercicio

Sea f medible en $[0, 1]$ y finita en casi todas partes. Demostrar que para $\varepsilon > 0$ existe M tal que $|f| < M$ excepto en un conjunto E tal que $mE < \varepsilon$

Definimos la sucesion de conjuntos $A_n = \{x \in [a, b] : |f(x)| \geq n\}$. Estos son medibles pues f es medible. Su interseccion es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in [a, b] : f(x) = \pm\infty\}$$

este conjunto tiene medida 0, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = 0$$

Ayudantia

La funcion caracteristica de un conjunto E es la funcion

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E \end{cases}$$

Ejercicio

La funcion χ_E es medible si y solo si E es un conjunto medible

Si (a, ∞) contiene a 1 entonces $\chi_E^{-1}(a, \infty) = E$. Si no contiene a 1 es vacio.
Si E es medible la preimagen siempre es medible. Si E no es medible la preimagen no siempre es medible

Una funcion medible que toma una cantidad finita de valores se llama una funcion simple.
Una funcion simple φ se puede escribir como la combinacion de funciones caracteristicas

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

Donde $\varphi^{-1}(a_i) = A_i$.
Una funcion escalonada es un tipo de funcion simple.

Ejercicios

Sea f medible en $[a, b]$ tal que $M > |f|$. Para todo ε existe una funcion φ simple tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo x

Podemos asumir que f es un funcion no negativa.
Para cada natural n dividimos el recorrido de f en los intervalos $I_{n,k} = (\frac{kM}{n}, \frac{(k+1)M}{n}]$ para $0 \leq k \leq n$

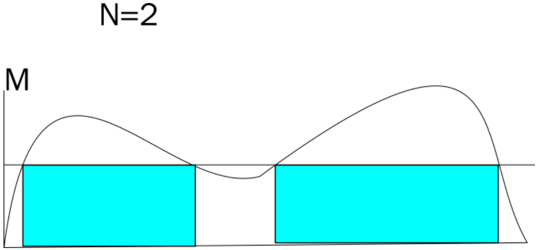

Figura: Segunda aproximacion

Ayudantia

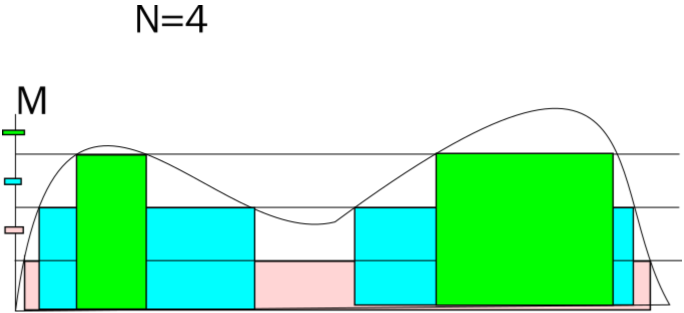

Figura: Cuarta aproximacion

Ayudantia

Para cada n definimos la funcion simple

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{I_{n,k}}$$

para todo x

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{M}{n}$$

por lo que dado ε existe n tal que φ_n es la funcion simple que se busca

Ayudantia

Si f tiene valores positivos y negativos definimos las funciones

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^{-}(x) = \begin{cases} |f(x)| \text{ si } f(x) \leq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) > 0 \end{cases}$$

aproximadas por funciones simples φ_n^{+} y φ_n^{-}.
En este caso $f = f^{+} - f^{-}$ es aproximada por la funcion simple $\varphi_n = \varphi_n^{+} - \varphi_n^{-}$

Ayudantia

Ejercicios

Sea φ simple en $[a, b]$. Para todo ε existe una funcion escalonada ϕ tal que $\phi(x) = \varphi(x)$ excepto en un conjunto E tal que $mE < \varepsilon$

Sea $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$.
Para cada A_i existe una union finita de intervalos abiertos disjuntos U_i tal que $m(A_i \triangle U_i) < \frac{\varepsilon}{n}$.

La funcion $\phi_n = a_i U_i$ es escalonada. Sea $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$.Las funciones ϕ y φ pueden no ser iguales solo dentro del conjunto $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \triangle U_i$ que tiene medida menor a ε

Ayudantia

Ejercicios

Sea ϕ una funcion escalonada en $[a, b]$. Para todo ε existe una funcion continua g tal que $\phi(x) = g(x)$ excepto en un conjunto E tal que $mE < \varepsilon$

La funcion ϕ esta definida por una particion de $[a, b]$ en n intervalos $I_i = [a_i, a_{i+1})$. Dentro de cada intervalo $[a_i + \frac{\varepsilon}{2n}, a_{i+1} - \frac{\varepsilon}{2n})$ definimos $f(x) = \phi$ y para cada intervalo $[a_i - \frac{\varepsilon}{2n}, a_{i+1} + \frac{\varepsilon}{2n})$ definimos a f como la funcion lineal uniendo ambos extremos