

Ayudantia 12

Juan Francisco Peña Miralles

11 de septiembre de 2021

Ejercicio

Una funcion f es integrable si y solo si $|f|$ es integrable.

La funcion $|f|$ es no negativa, por lo que el que sea integrable significa que $\int |f| < \infty$. La funciones f^+ y f^- son funciones no negativas tal que $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$ luego, por la monotonia de la integral, las funciones f^- y f^+ son integrables, lo que equivale a que f sea integrable.

Si f es integrable entonces las funciones no negativas f^+ y f^- son integrables, luego

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$$

Ejercicio

Una funcion f es integrable solo si es casi finita

Una funcion es integrable si y solo si f^+ y f^- son integrables, por lo que podemos asumir que f es no negativa Sea $E = \{x : f(x) = \infty\}$. Si $mE > 0$ entonces

$$\int f \geq \int_E f = \infty \cdot mE = \infty$$

Ejercicio

Sea f integrable en $\mathbb{R}$. La función

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f$$

es continua

Sea x_n una sucesión que converge a un punto x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{x_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \chi_{(-\infty, x_n]}$$

La sucesión $f_n = \chi_{(-\infty, x_n]}$ está acotada por $|f|$ y converge a $f \chi_{(-\infty, x]}$. Luego, por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \chi_{(-\infty, x_n]} = \int f \chi_{(-\infty, x]} = F(x)$$

Hemos visto que para una sucesión f_n de funciones no negativas y medibles

$$\sum \int f_n = \int \sum f_n$$

este resultado depende del teorema de convergencia monótona, por lo que es necesario restringirse a funciones no negativas. Usaremos el teorema de convergencia dominada para extenderlo a funciones con valores en todo $\mathbb{R}$

Ejercicio

Sea f_n una sucesión de funciones integrables. Si $\sum \int |f_n| < \infty$ entonces $\sum f_n$ converge en casi todas partes a una función integrable y

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

La sucesión $|f_n|$ es una sucesión de funciones medibles y no negativas, por lo que

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$$

y la función $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es integrable, por lo que converge c.t.p.(ejercicio anterior)

Por la desigualdad triangular

$$\left| \sum_{n=1}^m f_n \right| \leq \sum_{n=1}^m |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

las sumas parciales $\sum_{n=1}^n f_n$ estan dominadas por la funcion integrable $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, por el teorema de convergencia dominada, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una funcion integrable y

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Ejercicio

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1 + \frac{x}{n})^n}$$

Para todo n

$$\left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1 + \frac{x}{n})^n} \right| \leq \left| \frac{1}{(1 + \frac{x}{n})^n} \right|$$

El limite de $(1 + \frac{x}{n})^n$ es e^x , por lo que existe N tal que si $n > N$ entonces

$$e^x < (1 + \frac{x}{n})^n + 1 < 2(1 + \frac{x}{n})^n$$

luego

$$\frac{1}{(1 + \frac{x}{n})^n} < \frac{2}{e^x}$$

La sucesione $f_n = \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}$ esta acotada por $\frac{2}{e^x}$, la integral de esta funcion es

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{e^x} = 2(0 - [-1]) = 2$$

Por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1 + \frac{x}{n})^n}$$

el limite de $\frac{\sin \frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}$ es $\frac{\sin 0}{e^x} = 0$, por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = 0$$

Ejercicio

Sea f integrable. Demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f e^{\frac{-x^2}{n}} = \int f$$

Para todo n podemos acotar $|e^{\frac{-x^2}{n}}| < 1$ por lo que $|f e^{\frac{-x^2}{n}}| < f$ y f es integrable. Por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f e^{\frac{-x^2}{n}} = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f e^{\frac{-x^2}{n}}$$

para cada x el limite es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f e^{\frac{-x^2}{n}} = f e^0 = f$$