Ayudantia 11

Juan Francisco Peña Miralles

7 de septiembre de 2021

Para una sucesion de funciones positivas decreciente, no existe un equivalente del teorema de convergencia monotona.
La sucesion de funciones

$$f_n(x) = \chi_{[n,\infty)}$$

es decreciente y su limite es $f(x) = 0$ pero

$$\int f_n = m(n, \infty] = \infty$$

Ayudantia

Para una sucesion de funciones no negativas f_n el lema de Fatou dice

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

un caso donde no hay igualdad es la sucesion

$$f_x(x) = \chi_{[n,n+1]}$$

La cual converge puntualmente a 0 pero para todo n

$$\int f_n = \int_{[n,n+1]} = m[n, n+1] = 1$$

Ejercicio

Si f es una funcion medible no negativa tal que $\int f < \infty$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible E tal que $mE < \infty$ y

$$\int f < \int_E f + \varepsilon$$

Sea $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]}$. La sucesion f_n es creciente y converge puntualmente a f por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$|\int f - \int f_n| < \varepsilon$$

Ayudantia

$f_n \leq f$ para todo n, luego

$$\int f - \int_{[-n,n]} f = \int f - \int f_n$$

y $m[-n, n] = 2n < \infty$

Ayudantia

ejercicio

Sea f_n una sucesion de funciones medibles tal que $f_n \to f$ y E un conjunto medible tal que $mE < \infty$. Demostrar

$$\int_E |\sin(f)| = \lim_{n\to\infty} |\sin(f_n)|$$

La funcion $|\sin|$ es continua por lo que $\lim_{n\to\infty} |\sin(f_n)| = |\sin(f)|$. La funcion $|\sin(f_n)|$ esta acotada por 1. luego, por el teorema de convergencia acotada

$$\int_E |\sin(f)| = \lim_{n\to\infty} |\sin(f_n)|$$

Ayudantia

Teorema de Lebesgue

Una funcion f acotada definifa en un intervalo $[a, b]$ es integrable de Riemann si y solo si $m\{x : f(x) \text{ no es continua}\} = 0$

Definimos las funciones

$$h(x) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|x-y|<\delta} f(y)$$

$$g(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{|x-y|<\delta} f(y)$$

probaremos el siguiente lema

lema 1

La funcion f es continua en x si y solo si $h(x) = g(x)$

Si f es continua en x entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

por lo que

$$\sup_{|x-y|<\delta} f(y) < f(x) + \varepsilon$$

$$\inf_{|x-y|<\delta} f(y) > f(x) - \varepsilon$$

luego

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

Ayudantia

para todo x (incluso si f no es continua) y todo $\delta > 0$

$$\inf_{|x-y|<\delta} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{|x-y|<\delta} f(y)$$

por lo que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

por lo que

$$h(x) = f(x) = g(x)$$

Ayudantia

Sea f tal que $h(x) = g(x)$. Para toda sucesion x_n tal que $x_n \to x$

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq h(x) = g(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

y para toda sucesion $f(x_n)$ es cierto que

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe y es igual a $h(x)$ y $g(x)$.
Finalmente la desigualdad

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

implica

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = h(x) = g(x) = f(x)$$

Ayudantia

Demostramos un segundo lema

Lema 2

$$R\overline{\int_a^b} f = \int h$$

Cada funcion escalonada $\varphi \geq f$ que se usa para definir la integral superior tiene la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} M_n \chi_{(p_{i-1}, p_i)}$$

Donde $p_i \in P$ son los extremos de intervalos que forman una particion de $[a, b]$ y $M_n = \sup_{x \in [p_{i-1}, p_i]} f(x)$

Ya que la integral superior es el infimo de las integrales de estas funciones escalodandas, existe una sucesion de funciones escalonadas φ_n, cada una en correspondencia con un conjunto finito $P_n \subset [a, b]$, tal que

$$|R\overline{\int_a^b} f - \int \varphi_n| < \varepsilon$$

Dado P_n y P_{n+1} podemos crear un refinamiento Q_{n+1} de P_{n+1} tal que $P_n \subset Q_{n+1}$ y $\{a + \frac{k(b-a)}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n\} \subset Q_{n+1}$ y llamamos ϕ_n a la funcion escalonada en correspondencia con Q_n.

Ayudantia

Sea $Q = \bigcup Q_n$. Este conjunto tiene medida 0 pues cada Q_n es un conjunto finito. Si $x \notin Q$ entonces para cada n esta contenido en un intervalo I_n de la particion Q_n. Cada intervalo I_n tiene largo menor o igual a $\frac{(b-a)}{2^n}$ por lo que para todo $\delta > 0$ existe N tal que si $n > N$ entonces $I \subset (x-\delta, x+\delta)$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = h(x)$$

la funcion $h(x)$ es el limite de funciones escalonadas en casi todas partes, por lo que es medible y por el teorema de convergencia acotada:

$$\int h = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n = R\overline{\int_a^b} f$$

de la misma manera podemos demostrar

Lema 3

$$R\underline{\int_a^b} f = \int g$$

Ayudantia

Si f es continua en casi todas partes, entonces $g = h$ c.t.p, por lo que

$$R\underline{\int_a^b} f = \int g = \int h = R\overline{\int_a^b} f$$

y f es integrable de Riemann.
Si f es integrable de Riemann entonces

$$\int g = R\underline{\int_a^b} f = R\overline{\int_a^b} f = \int h$$

y $g \leq h$ por lo que

$$0 = \int h - \int g = \int |h - g|$$

luego, $h = g$ c.t.p, por lo que f es continua c.t.p.