Ayudantia 10

Juan Francisco Peña Miralles

3 de septiembre de 2021

Ejercicio

Sea f integrable en $(a-\delta, b+\delta)$ para un $\delta > 0$. Demostrar

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f(x) - f(x+h)| = 0$$

Al ser f integrable existe para todo ε una funcion medible y acotada g_ε tal que $g_\varepsilon \leq f$ y

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta} f - g_\varepsilon < \varepsilon$$

luego

Ayudantia

$$\int_a^b |f(x) - f(x+h)|$$
$$= \int_a^b |[f(x) - g_\varepsilon(x)] + [g_\varepsilon(x+h) - f(x+h)] + [g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x+h)]|$$
$$\leq \int_a^b |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x+h)| + 2\varepsilon$$

Si

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |g(x) - g(x+h)| = 0$$

se cumple para toda funcion medible y acotada entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f(x) - f(x+h)| \leq 2\varepsilon$$

Ayudantia

Ahora es necesario demostrar la igualdad

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |g(x)-g(x+h)| = 0$$

para funciones medibles y acotadas.
Por el teorema de Lusin existe una funcion continua y acotada l tal que $m\{x : g(x) \neq l(x)\} < \varepsilon$. Para cada $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&m\{x : g(x) - g(x+h) \neq l(x) - l(x+h)\} \\
&\leq m\{x : g(x) \neq l(x)\} + m\{x : g(x+h) \neq l(x+h)\} \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Ayudantia

Para cada h

$$\int_a^b |g(x) - g(x+h)| \leq \int_a^b |l(x) - l(x+h)| + 2\varepsilon$$

La funcion l es continua por lo que $\lim_{h\to 0} |l(x) - l(x+h)| = 0$ y por el teorema de convergencia acotada

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \int_a^b |g(x) - g(x+h)| \\
&\leq \lim_{h\to 0} \int_a^b |l(x) - l(x+h)| + 2\varepsilon \\
&= \int_a^b \lim_{h\to 0} |l(x) - l(x+h)| + 2\varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Ayudantia

Ejercicio

Sean f_n y f funciones medibles y acotadas tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y g una funcion medible y acotada tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - g| = 0$$

demostrar que $f = g$ c.t.p.

Usaremos el lema de Fatou. Este lema nos dice que

$$\int \lim_{n\to\infty} |f_n - g| \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - g|$$

En este caso $\int \lim_{n\to\infty} |f_n - g| = \int |f - g|$ y $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - g|$ existe, por lo que es igual al limite inferior

Ayudantia

En este caso $\int \lim_{n\to\infty} |f_n - g| = \int |f - g|$ y $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - g|$ existe, por lo que es igual al limite inferior

$$0 \leq \int |f - g| \leq \lim_{n\to\infty} \int |f_n - g| = 0$$

esto implica $\int |f - g| = 0$, luego, $f = g$ c.t.p.

El teorema de convergencia monotona nos dice

Teorema de convergencia monotona

Si f_n es una sucesion creciente de funciones medibles y no negativas

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n$$

Si f es una funcion medible y no negativa (no necesariamente acotada ni de soporte compacto) podemos crear una sucesion f_n de funciones acotadas y con soporte compacto

Sea

$$^{n}f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \leq n \\ n \text{ si } f(x) > n \end{cases}$$

Definimos la funcion f_n

$$f_n =^n f \cdot \chi_{[-n,n]}$$

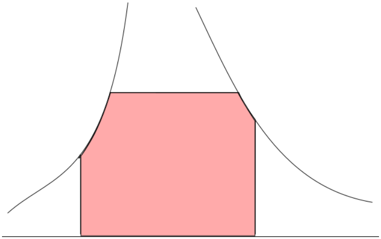

Figura: aproximacion por una funcion acotada de soporte compacto

Ayudantia

Usaremos esta aproximacion para demostrar el siguiente lema

Lema de Riemann-Lebesgue

Si f es integrable en $\mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\cos(nx) = 0$$

Hemos visto que existe una sucesion de funciones f_n medibles acotadas y nulas fuera de un intervalo compacto tal que $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int f - f_n$$

Ayudantia

Dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$\int f - f_n < \varepsilon$$

Sea M tal que $|f_n| < M$ y $[a, b]$ un intervalo que contiene al soporte de f_n. Dado $\delta > 0$ existe una funcion escalonada ϕ y un conjunto medible E tal que $mE < \delta$, $|\phi| < M$, $[a, b]$ contiene al soporte de ϕ y $|\phi - f_n| < \varepsilon$, luego

Ayudantia

$$\int |f - \phi| = \int |(f - f_n) + (f_n - \phi)|$$
$$\leq \int f - f_n + \int_{(a,b)\setminus E} |f_n - \phi| + \int_E |f_n - \phi|$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon(b - a) + \delta 2M$$

por lo que podemos aproximar la integral de f por la de una funcion escalonada ϕ

Ayudantia

Para todo n y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
|\int f(x)\cos(nx)| &= |\int [f(x) - \phi(x) + \phi(x)]\cos(nx)| \\
&\leq \int |f - \phi| + |\int \phi \cos(nx)| \\
&\leq \varepsilon + |\int \phi \cos(nx)|
\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\cos(nx) \leq \varepsilon + \lim_{n\to\infty} |\int \phi \cos(nx)|$$

Ayudantia

La funcion ϕ es escalonada por lo que es suficiente calcular la integral en un intervalo

$$|\int_a^b a_i \cos(nx)| = |a_i||\int_a^b \cos(nx)| = |a_i||\frac{\sin(nb) - \sin(na)}{n}| \leq \frac{2|a_i|}{n}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} |\int \phi \cos(nx)| = 0$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x) \cos(nx) \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$