Ayudantia 9

Juan Francisco Peña Miralles

August 2021

Ayudantia

Sabemos que para una sucesion f_n de funciones en un intervalo $[a, b]$ que converge uniformemente a f, la integral de Riemann cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f$$

Veremos que cuando un ejemplo donde esto no es cierto al no converger uniformemente

Ayudantia

El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable por lo que existe un orden r_n para $r_n \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$. Definimos la funcion f_n

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0 \text{ si } x \notin \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ entonces existe N tal que para $n > N$ $f_n(x) = 1$. Si $x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b]$ entonces $f_n(x) = 0$ para todo n. Luego

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$$

Ayudantia

La funcion f_n es continua e igual a 0 fuera de una cantidad finita de puntos, por lo que su integral de Riemann es

$$\int_a^b f_n = 0$$

La funcion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ no es integrable de Riemann pues todo subintervalo de $[a, b]$ contiene racionales e irracionales, por lo que

$$\overline{\int_a^b} \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} = 1$$

$$\underline{\int_a^b} \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} = 0$$

Ayudantia

La funcion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ es 0 c.t.p, por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = 0 = \int f$$

Ejercicio

Si $\int f = 0$ y $f \geq 0$ c.t.p. entonces $f = 0$ c.t.p.

Existe la integral $\int f$ por lo que

$$\int f = \sup \int \varphi$$

de todas la funciones simples φ tal que $\varphi \leq f$.
Sea $E_n = \{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$.

El conjunto E_n tiene que tener medida 0 para todo n pues is existe n tal que $E_n > 0$ entonces

$$\frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq f$$

y por lo tanto

$$0 < \frac{1}{n} m E_n = \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq \int f$$

Ayudantia

La union de los conjuntos E_n es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x : x > 0\}$$

y este conjunto tiene medida 0 pues es la union numerable de conjuntos de medida 0

Corolario

Si $\int |f - g| = 0$ entonces $f = g$ c.t.p.

Ayudantia

Convergencia monotona de funciones simples

Sea ϕ_n una sucesion de funciones simples creciente c.t.p. Si existe una constante A tal que $\int \phi_n < A$ para todo n, entonces ϕ_n converge a una funcion finita en casi todas partes

Dado $\varepsilon > 0$, sea $E_n = \{x : \phi_n(x) > \frac{A}{\varepsilon}\}$. Para cada n:

$$\frac{A}{\varepsilon} mE_n \leq \int_{E_n} \phi_n \leq \int \phi_n < A$$

luego, $mE_n < \varepsilon$

Dado x, si la sucesion $\phi_n(x)$ no esta acotada existe N tal que si $n > N$ entonces $\phi_n(x) > \frac{A}{\varepsilon}$. Luego

$$\{x : \phi_n(x) \text{ no es una sucesion acotada}\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

La sucesion ϕ_n es creciente en casi todas partes por lo que existe un conjunto A de medida 0 tal que $E_n \setminus A \subset E_{n+1} \setminus A$.

$$m(\{x : \phi_n(x) \text{ no es una sucesion acotada}\}) \leq m \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} mE_n < \varepsilon$$

esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, por lo que $\phi_n(x)$ es una sucesion acotada en casi todas partes

La sucesion $\phi_n(x)$ es acotada y creciente para casi todo n, por lo que converge a un valor finito.

Ejercicio

Si $|\int f| = \int |f|$ entonces $f \geq 0$ c.t.p o $f \leq 0$c.t.p.

Separamos f en la funciones positivas f^+ y f^- tal que $f = f^+ - f^-$ para obtener la ecuacion

$$|\int f| = |\int f^+ - \int f^-|$$

para todo x, $f^+(x) = 0$ o $f^-(x) = 0$, por lo que

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^-$$

a partir de la igualdad $|\int f| = \int |f|$ llegamos a

$$|\int f^+ - \int f^-| = \int f^+ + \int f^-$$

Ayudantia

Luego una de las siguiente ecuaciones es cierta

$$\int f^+ - \int f^- = \int f^+ + \int f^-$$

o

$$\int f^- - \int f^+ = \int f^+ + \int f^-$$

por lo que $\int f^+ = 0$ o $\int f^- = 0$ lo que a su ves implica $f^+ = 0$ c.t.p o $f^- = 0$ c.t.p.