

Tarea 2

31 de agosto de 2021

Pregunta 1

1. ¿Existe una función positiva f no medible tal que \sqrt{f} sea medible?(**1 punto**)
2. Sea f una función acotada. Demostrar que f es medible si y solo si existe una sucesión de funciones simples y acotadas que converge uniformemente a f (**1 punto**)
3. Sea f continua c.t.p. Demostrar que f es medible(**1 punto**)
4. Sea f medible y g medible tal que $g \neq 0$ c.t.p. Demostrar que $\frac{f}{g}$ es medible.(**1 punto**)
5. Sea $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ definida en $[0, 1]$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un conjunto medible E_n tal que $mE_n < \varepsilon$ y f_n converge uniformemente a una función medible en E_n^c .(**1 punto**)

Pregunta 2

1. Demostrar el teorema de Lusin:
Sea f una función medible en el intervalo $[a, b]$. Para todo $\delta > 0$ existe una función continua g tal que $m\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\} < \delta$ (**2 puntos**)
2. ¿Es cierto este teorema para una función f definida en un conjunto medible E de medida infinita? (**1 punto**)

Pregunta 3

Una función f es Borel-medible si $f^{-1}(a, \infty)$ es un conjunto de Borel para todo $a \in \mathbb{R}$

1. Sea f una función medible y g una función continua. Demostrar que $g \circ f$ es medible. ¿Es $f \circ g$ siempre medible? (**1 puntos**)
2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$ medible. Construir una sucesión de funciones simples ϕ_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = f$ y $|\phi_n| \leq |\phi_{n+1}| \leq |f|$ para todo n . (**2 puntos**)
3. Demostrar que para toda función medible $f : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$ existe una función Borel-medible g tal que $m\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} = 0$ (**2 puntos**)

Pregunta 4

1. Sea E un conjunto medible tal que $mE > 0$. Demostrar que existe un intervalo (a, b) tal que $m[(a, b) \cap E] > 0$ (**1 punto**)
2. Sea V un conjunto de Vitali y sea $E \subset V$ un conjunto medible. Demostrar que $mE = 0$ (**2 puntos**)

3. Sea E un conjunto medible tal que $mE > 0$. Demostrar que existe un conjunto $A \subset E$ no medible. (2 puntos)

Nota: $\frac{\text{Puntos}}{3} + 1$

Fecha de entrega: 20 de Septiembre