Ayudantia 7 y 8

Juan Francisco Peña Miralles

27 de agosto de 2021

Ayudantia

Si f es medible entonces el conjunto $f^{-1}(c)$ es medible para toda constante c. Construiremos un contraejemplo del reciproco de esta afirmacion, esto es, una funcion tal que $f^{-1}(c)$ sea medible pero f no sea medible.

Ayudantia

Sea $E \subset \mathbb{R}^+$ un conjunto no medible. Definimos la funcion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $f(x) = x\chi_E(x) - x\chi_{E^c}(x)$. Esta funcion es inyectiva, la preimagen de cada constante c es $\{|c|\}$ o el conjunto vacio. La preimagen de $(0, \infty)$ es E, por lo que no es medible.

Ayudantia

Ejercicio

Sea f diferenciable en un intervalo (a, b). Demostrar que f' es medible

La funcion f es diferenciable, por lo que es continua en (a, b). Para todo $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(\frac{1}{n})}{x - \frac{1}{n}}$$

La funcion $f(x) - f(\frac{1}{n})$ es medible. Para la funcion $\frac{1}{x-\frac{1}{n}}$ la preimagen de $[a, \infty)$ es un intervalo si $a \geq \frac{1}{n}$ y es la union de dos intervalos si $a < \frac{1}{n}$, por lo que es una funcion medible

Ayudantia

Ejercicio

Sea f una funcion creciente en un conjunto medible E. Demostrar que f es medible

Tenemos que demostrar que el conjunto $f^{-1}(a, \infty) = \{x \in E : f(x) > a\}$ es medible. Si $x \in \{x \in E : f(x) > a\}$ entonces $E \cap [x, \infty) \subset \{x \in E : f(x) > a\}$ pues para todo $y > x$ su imagen cumple $f(y) > f(x) > a$

Si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\text{ínf}\{x \in E : f(x) > a\} = b$ entonces $E \cap (b, \infty) = \{x \in E : f(x) > a\}$ y esta es la interseccion de dos conjuntos medibles, por lo que es medible.
Si $\text{ínf}\{x \in E : f(x) > a\} = -\infty$ entonces para todo $x \in E$ existe $y \in E$ tal que $y < x$ y $a < f(y) < f(x)$, por lo que $E = \{x \in E : f(x) > a\}$

Ayudantia

Ejercicio

Sean A y B conjuntos medibles y $X = A \cup B$. Una funcion f es medible en X si y solo si $f|_B$ y $f|_A$ son medibles

Si f es medible entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(a, \infty)$ es medible. La preimagen de la restriccion es $f|_A^{-1}(a, \infty) = A \cap f^{-1}(a, \infty)$. Esta es la interseccion de conjuntos medibles, por lo que es medible y tanto $f|_A$ como $f|_B$ son medibles.

Sean $f|_A$ y $f|_B$ medibles. Para cada $x \in X$, $x \in A$ o $x \in B$, luego, para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(a, \infty) = f|_A^{-1}(a, \infty) \cup f|_B^{-1}(a, \infty)$$

Al ser $f|_A$ y $f|_B$ medibles, esta es una union de conjuntos medibles, por lo que es medible.

Ayudantia

Usaremos la funcion de Cantor para demostrar que

- La imagen $f(A)$ de un conjunto medible A no siempre es medible, incluso cuando f es continua
- Existen conjuntos que son medibles pero no de Borel

Antes de hacer esto, veremos otra manera de definir esta funcion

Ayudantia

Hemos definido el conjunto de cantor C como la interseccion de los conjuntos C_n, los cuales son la union de conjuntos cerrados

Figura: El conjunto de cantor

El complemento de C_n es la union de $2^n - 1$ conjuntos abiertos. Ordenamos estos conjuntos y los llamamos $I_{n,k}$, con $1 \leq k \leq 2^k - 1$

Definimos $f_0(x) = x$ y para cada n definimos f_n en C_n^c

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \text{ si } x \in I_{n,k}$$

y en cada intervalo cerrado de C_n definimos f_n como la unica funcion continua y lineal uniendo ambos extremos

Ayudantia

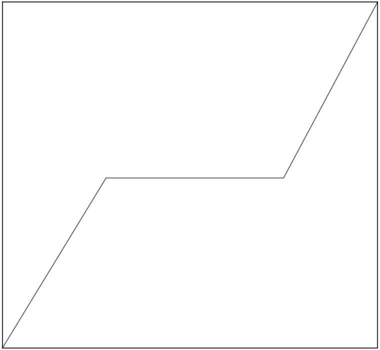

Figura: n=1

Ayudantia

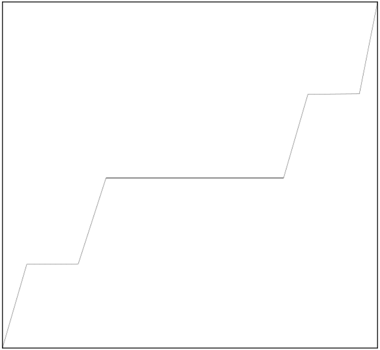

Figura: n=2

El espacio de funciones continuas en $[0, 1]$ con la norma del supremo (la cual usamos para definir la convergencia uniforme) es completo, por lo que una sucesion de Cauchy converge a una funcion continua. La sucesion f_n es de Cauchy, por lo que su limite es una funcion continua. Definimos este limite como la funcion de Cantor

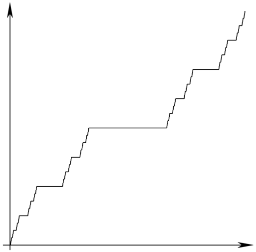

Figura: La funcion de Cantor

Ayudantia

La funcion de Cantor f tiene tres propiedades que usaremos para construir conjuntos

- f es continua
- f es creciente
- $f(C) = [0, 1]$

Ejercicios

Existe un conjunto medible A y una funcion continua f tal que $f(A)$ no es medible

Sea $V \subset [0,1]$ el conjunto de Vitali, el cual no es medible. La funcion de Cantor f es continua y $f(C) = [0,1]$, por lo que $f(C \cap f^{-1}(V)) = V$. El conjunto $C \cap f^{-1}(V)$ esta contenido en C, el cual tiene medida 0, por lo que tiene tambien medida 0 y es un conjunto medible.

Ayudantia

La funcion $g(x) = f(x) + x$ es continua y estrictamente creciente. Su imagen es $[0, 2]$. Los conjuntos $[0, 1]$ y $[0, 2]$ son compactos y la funcion g inyectiva y continua, por lo que g^{-1} es una funcion continua, i.e. g es un homeomorfismo.

Ayudantia

Para cada intervalo $I_{n,k}$ la imagen de la funcion de Cantor es una constante c, luego, $g(I_{n,}) = c + I_{n,k}$, por lo que $m[g([0,1] \setminus C)] = 1$.
La funcion g es biyectiva, por lo que $g([0,1] \setminus C)$ y $g(C)$ son disjuntos y su union es $[0,2]$. El conjunto $g([0,1] \setminus C)$ es la union numerable de conjuntos medibles, por lo que es medible y su complemento dentro de $[0,2]$, el conjunto $g(C)$, tambien lo es.
Podemos encontrar la medida de $g(C)$ con la siguiente ecuacion

$$m[g(C)] = m[0,2] - m[g([0,1] \setminus C)] = 2 - 1 = 1$$

Ayudantia

Ejercicio

Encontrar una funcion medible f y un conjunto medible E tal que $f^{-1}(A)$ no es medible.

Si un conjunto A tiene medida positiva existe un conjunto $B \subset A$ tal que B no es medible. Esto se demuestra en los ejercios 15 y 16 del capitulo 3.4 de Royden.
El conjunto $g(C)$ tiene medida 1, por lo que contiene un conjunto no medible F. El conjunto $g^{-1}(F)$ esta contenido en C, por lo que tiene medida 0 y es medible. La funcion g es un homeomorfismo, por lo que g^{-1} es medible y

$$(g^{-1})^{-1}(g^{-1}(F)) = g(g^{-1}(F)) = F$$

es un conjunto no medible.

Pregunta

¿Existe un conjunto que es medible y no es de Borel?

En una ayudantia anterior demostramos que para una funcion continua, la preimagen de un conjunto de Borel es medible, hemos encontrado un conjunto medible y una funcion continua tal que la preimagen de este conjunto no es medible, por lo que este es un conjunto medible que no es de Borel

En clases se vio una version mas debil del teorema de Egoroff, el cual corresponde a uno de los principios de Littlewood: Una sucesion convegente de funciones medibles es casi una sucesion uniformemente convergente.

Proposicion 24

Sea A un conjunto de medida finita y f_n una sucesion de funciones medibles en E que convergen a una funcion f. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto E tal que $mE < \delta$ y un natural N tal que para $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para $x \notin E$

Veamos el ejemplo de x^n (lo dibujo en la pantalla)

Teorema de Egoroff

Sea A un conjunto de medida finita y f_n una sucesion de funciones medibles en E que convergen a una funcion f. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto E tal que f_n converge a f uniformemente

Por la proposicion 23 para todo n existe un natural N y un conjunto medible E_n tal que $mE_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ para $x \in E_n^c$ y $m > N$.
Sea $E = \bigcup E_n$. La medida de E esta acotada por

$$mE \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Ayudantia

Por la ley de De Morgan, $E^c \subset E_n^c$ para todo n, por lo que f_n converge uniformemente en E^c

Existen sucesiones de funciones para las cuales no va a ser posible la convergencia uniforme fuera de un conjunto E de medida 0. Construiremos un ejemplo.

Ayudantia

En el intervalo $[0,1]$ definimos para cada n una funcion escalonada

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \text{ si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Esta sucesion converge a la funcion contante $f(x) = 0$ Se $E \subset [0,1]$ un conjunto de medida 0. Para todo n el intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ tiene medida $\frac{1}{n}$, por lo que no esta contenido en E, luego, para todo n existe $x \in E^c$ tal que $|f(x)_n - f(x)| = 1$ por lo que la sucesion no converge uniformemente.

Demostramos en una ayudantia anterior el siguiente lema

Lema de Borel–Cantelli

Si E_n es una sucesion de conjuntos medibles tal que $\sum mE_n$ converge entonces

$$m(\bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n} E_k) = 0$$

A continuacion lo aplicamos a funciones medibles

Ejercicio

Para toda sucesion f_n de funciones medibles y casi finitas. Existe una sucesion ε_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n f_n = 0$$

en casi todas partes

Para cada n la funcion f_n es casi finita, por lo que existe un conjunto E_n tal que $mE_n < 2^{-n}$ y para $x \notin E_n$

$$|f_n(x)| < M_n$$

para algun real M_n

Sea $\varepsilon_n = \frac{1}{M_n n}$. Para cada n se cumple

$$|\varepsilon_n f_n(x)| < \frac{1}{n}$$

si x esta fuera del conjunto E_n.
La serie

$$\sum mE_n = \sum \frac{1}{2^n}$$

es una serie geometrica, por lo que converge, luego

$$m(\bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n} E_k) = 0$$

Ayudantia

Sea x tal que

$$x \notin \bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n} E_k$$

existe N tal que

$$x \notin \bigcup_{k=N} E_k$$

luego para $n > N$

$$|\varepsilon_n f_n(x)| < \frac{1}{n}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n f_n(x) = 0$$

para x fuera de un conjunto de medida 0