Ayudantia 5

Juan Francisco Peña Miralles

July 2021

Ayudantia

Ejercicio

Si $mA > 0$ entonces existen $x, y \in A$ tal que $|x - y|$ es irracional

Si no existen x, y a una distancia irracional, entonces dado $x \in A$ todo $y \in A$ es igual a una suma $x + q$ con $q \in \mathbb{Q}$. La funcion $f : \mathbb{Q} \to A$ definida por $f(x) = x + q$ es sobreyectiva, por lo que A es numerable, contradiciendo que $mA > 0$.

Ayudantia

Ejercicio

Sea f una funcion continua. Si E es un conjunto de Borel entoces $f^{-1}(E)$ es medible.

Definimos la coleccion $\mathcal{C} = \{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$.
La preimagen del conjunto vacio es el conjuto vacio, el cual es medible, por lo que esta no es una coleccion vacia.
Sea $E_n \in \mathcal{C}$ una sucesion de conjuntos. Para toda funcion f es cierto que

$$f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n)$$

Los conjuntos medibles forman una $\sigma-$algebra, por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n)$ es medible, luego, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$

Ayudantia

Usando la igualdad $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ podemos demostrar que $\mathcal{C}$ es tambien cerrado por complementos.
El conjunto $\mathcal{C}$ cumple todo lo necesario para ser una σ-algebra. Al ser f una funcion continua, Si A es abierto entonces $f^{-1}(A)$ es abierto y todo conjunto abierto es medible, por lo que

$$\{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abierto}\} \subset \mathcal{C}$$

. La $\sigma-$algebra de Borel es aquella generada por los conjuntos abiertos, luego

$$\{A \subset \mathbb{R} : A \text{ Boreliano}\} \subset \mathcal{C}$$

Ayudantia

Ejercicio

Sea f una funcion tal que $f^{-1}(I)$ es medible para todo intervalo abierto I. Si E es un conjunto de Borel entoces $f^{-1}(E)$ es medible.

Llamamos a una funcion *medible* si cumple con esta propiedad.

Serie geometrica

Para trabajar con el conjunto de Cantor usaremos la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Donde $|r| < 1$

Funcion de Cantor

Hemos visto que los elementos de $[0,1]$ que pueden ser representados por una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

donde $a_n \in \{0,2\}$ pertenecen al conjunto de canto C.
A continuacion demostraremos que todo elemento de $[0,1]$ puede ser representado por una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$$

donde $b_n \in \{0,1,2\}$

Funcion de Cantor

Dado $a \in [0,1]$ encontraremos una sucesion b_n tal que esta serie converge y demostraremos que existen a los mas dos de estas sucesiones diferentes.
Para todo n sea A_n una particion de $[0,1]$ en los intervalos $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n})$ con $0 \leq k < 3^n - 1$. Los extremos $\frac{k}{3^n}$ de estos intervalos son tambien extremos de la particion A_{n+1} pues $\frac{k}{3^n} = \frac{3k}{3^{n+1}}$ y los intervalos $[\frac{3k}{3^{n+1}}, \frac{3k+3}{3^{n+1}})$ de A_n contiene a los intervalos $[\frac{3k}{3^{n+1}}, \frac{3k+1}{3^{n+1}})$, $[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}})$ y $[\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{3k+3}{3^{n+1}})$ por lo que la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{3^k} \text{ donde } b_k \in \{0,1,2\}$$

es un extremo izquierdo de un intervalo de la particion A_n

Funcion de Cantor

Sea $a \in [0,1]$. Para n existe un unico intervalo $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n})$ que contiene a a. Sea $b_k \in \{0,1,2\}$ la sucesion tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{3^k} = \frac{k}{3^n}$$

Esta sucesion es unica pero el limite de una serie contenida en $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n})$ es un elemento de su clausura $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ y $\frac{k+1}{3^n}$ es igual a 2 de estas series pues

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^k} \sum_{n=0} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^k} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3^k} \frac{3}{2} = \frac{1}{3^{k-1}}$$

Si para estos caso elegimos siempre la serie que termina en infinitos 2, podemos escribir cada $a \in [0,1]$ de manera unica

Funcion de Cantor

Hemos asociado a cada real en $[0,1]$ un una sucesion $b_k \in \{0,1,2\}$ unica, esta es la representacion en base 3, por ejemplo,
$\frac{1}{3} = 0,1 = 0,022222\ldots$.
Usando esta representacion, podemos definir el conjunto de Cantor como aquellos reales en $[0,1]$ que pueden ser escritos en base 3 sin usar el 1.
Ahora podemos definir la funcion de cantor para cada sucesion b_k.
Si b_k esta en C entonces

$$f(b_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \frac{1}{2^n}$$

Si $b_k \notin C$ entonces existe un menor N tal que $b_k = 1$ y definimos a f como la suma

$$f(b_k) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n}{2} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^N}$$

Ayudantia

Ejercicio

Demostrar que la funcion de Cantor es continua.