Analisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Profesor: Manuel Pinto J.
Ayudante: Juan Peña

Tarea 1

16 de agosto de 2021

Pregunta 1

Determinar y justificar si las afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si un conjunto tiene medida 0 entonces su clausura tiene medida 0. **(0,8 puntos)**
2. Si la clausura de un conjunto tiene medida 0 entonces este conjunto tiene medida 0. **(0,8 puntos)**
3. La union de conjuntos no medibles es no medible **(0,8 puntos)**
4. Si E es acotado entonces $m^*(E)$ puede calcularse usando cubrimientos finitos. **(0,8 puntos)**
5. Si E es compacto entonces $m^*(E)$ puede calcularse usando cubrimientos finitos. **(0,8 puntos)**
6. La σ-algebra generado por la coleccion de intevalos $(-\infty, b]$ con $b \in \mathbb{R}$ es la $\sigma-$algebra de borel. **(0,8 puntos)**
7. Dado un conjunto E definimos $cE = \{ce : e \in E\}$. Si E es medible entonces la medida exterior de cE es $m^*(cE) = |c|m^*(E)$. **(0,8 puntos)**

Pregunta 2

Sean A_n numerables intervalos disjuntos. Demostrar que $m^*(\bigcup A_i) = \sum m^*(A_i)$ usando la definicion de medida exterior **(2,5 puntos)**

Pregunta 3

Dado un intervalo cerrado I centrado en c sea $I(\alpha)$ el intervalo abierto centrado en c de largo α.

Dado $0 \leq \delta < 1$ definimos $C_0(\delta)$ como el intervalo $[0, 1]$ y el conjunto $C_{k+1}(\delta)$ como

$$C_{k+1}(\delta) = C_k(\delta) \setminus \bigcup_{1 \leq n \leq 2^k} I_n(\delta 3^{-k})$$

donde I_n son los intervalos cerrados y disjuntos que forman $C_k(\delta)$.

Definimos al conjunto $C(\delta)$ como la interseccion

$$C(\delta) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k(\delta)$$

1. Demostrar que $C(\delta)$ es medible. **(0,9 puntos)**
2. Calcular $mC(\delta)$ **(2 puntos)**

Pregunta 4

1. Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m^*(E) < \infty$. Demostrar que E es medible si y solo si existe un conjunto $F \in \mathcal{G}_\sigma$ tal que $F \subset E$ y $m^*(E \setminus F) = 0$. **(2,5 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continuamente diferenciable. Demostrar que si $E \subset \mathbb{R}$ tiene medida 0 entonces $f(E)$ tiene medida 0. **(2,5 puntos)**

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continuamente diferenciable. Demostrar que la imagen de un conjunto medible es medible. **(2 puntos)**

Nota: $\mathbf{\frac{Puntos}{3} + 1}$