Ayudantia 2

Juan Francisco Peña Miralles

July 2021

Medida exterior

Hemos definido la medida exterior m^* mediante la aproximacion por numerables intervalos abiertos:

$m^*(A) = \inf \sum l(I_n)$ donde I_n es un cubrimiento por intervalos abiertos

La medida exterior es subaditiva, esto es

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum m^*(A_n)$$

y ademas esta definida para todo subconjunto de $\mathbb{R}$

Medida exterior

Monotonia

Si $A \subset B$ entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

Todo cubrimiento de B es tambien un cubrimiento de A. El infimo de un conjunto de numeros reales es menor o igual que el de un subconjunto (El subconjunto no puede contener un elemento menor que los del conjunto original).
Esto demuestra que $m^*(A) \leq m^*(B)$ (¿Cual es el conjunto de numeros reales?)

Ayudantia

Podemos definir la traslacion de un conjunto A como el conjunto $A + c = \{a + c : a \in A\}$

Invariante por traslacion

$m^*(A) = m^*(A + c)$

La funcion $f(I_n) = I_n + c$ nos da una biyeccion desde el conjunto de cubrimientos de A al conjunto de cubrimientos de $A + c$. Veamos que esta funcion preserva el largo:

$$m^*(a, b) = b - a = b + c - a - c = m^*(a + c, b + c)$$

por lo que ambas medidas exteriores son iguales

Ayudantia

Podemos usar la propiedades encontradas hasta ahora para demostrar una desigualdad

ejercicio

Sea $A \subset B$ y $m^*(B)$ finito. Demuestre que $m^*(B) - m^*(A) \leq m^*(B \setminus A)$

El conjunto B se puede escribir como la union $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Por la subaditividad:

$$m^*(B) \leq m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A) \leq m^*(A) + m^*(B \setminus A)$$

y restamos $m^*(A)$ a ambos lados.

Ayudantia

Ahora usaremos esta desigualdad para demostrar

Ejercicio

Si $m^*(A) = 0$ entonces $m^*(B) = m^*(B \setminus A) = m^*(A \cup B)$

Demostracion:
Por la monotonia de m^*

$$m^*(B \setminus A) \leq m^*(B)$$

usamos la desigualdad demostrada anteriormente

$$m^*(B) - m^*(A) \leq m^*(B \setminus A)$$

y $m^*(A) = 0$ por lo que

$$m^*(B) \leq m^*(B \setminus A)$$

Ayudantia

El conjunto $A \setminus B$ es subconjunto de A por lo que tiene medida exterior 0 y $A \cup B \setminus (A \setminus B) = B$, por lo que es un caso de la igualda anterior.

Ejercicio

Encontrar un cubrimiento por intervalos abiertos I_n de $\mathbb{N}$ tal que $m^*(\bigcup I_n) \leq \varepsilon$

El conjunto $\mathbb{N}$ es numerable por lo que podemos cubrirlo con intervalos $(n - a_n, n + a_n)$.

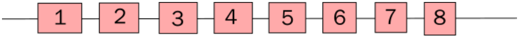

Figura: ¿Cuan grandes deberian ser estos intervalos?

Por la subaditividad de la medida exterior m^*, podemos acotar la medida de este cubrimiento:

$$m^*(\bigcup I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$$

Ayudantia

Necesitamos una serie la cual podamos acotar por un numero finito. Un ejemplo de esto es la serie geometrica, si elegimos $a_n = \varepsilon(\frac{1}{2})^n$ entonces:

$$m^*(\bigcup I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon(\frac{1}{2})^n = \varepsilon$$

Ayudantia

Para definir m^* importante que podamos aproximar la medida por *infinitos* numerables intervalos abiertos. Por ejemplo

Ejercicio

Calcular $\inf \sum l(I_n)$ para cubrimientos por finitos intervalos abiertos I_n del conjunto $\mathbb{N}$

Sea I_n uno de estos cubrimientos. Asumamos que son todos acotados. Su union es entonces acotada, pues hay una cantidad finita. El conjunto $\mathbb{N}$ no es acotado, por lo que existe por lo menos un I_n no acotado y $\sum l(I_n) = \infty$.

Otro ejemplo de esto es el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Los racionales son un conjunto denso, por lo que para cubrimientos de finitos I_n, $\sum I_n \geq 1$.
Demostracion:
Ejercicio para ustedes.

Conjunto de cantor

Un ejemplo de un conjunto C no numerable cuya medida exterior es 0. Definimos el conjunto de Cantor C mediante la siguiente sucesion.

- $A_1 = [0, 1]$
- Dividimos el intevalo A_1 en tres partes iguales y removemos el tercio central, esto es, $A_2 = A_1 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
- Al remover el intervalo intermedio A_2 consite de dos intervalos disjuntos. Dividimos cada uno de estos intervalos en tres partes iguales y removemos el central, obteniendose cuatro intervalos disjuntos, los cuales llamamos $A_3 = A_2 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$

Cada A_n es la union de 2^n intervalos cerrados y disjuntos

Conjunto de Cantor

Cada A_n contiene a A_{n+1}, por lo que podemos definir el conjunto de Cantor como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Figura: El conjunto de cantor

Este conjunto no es vacio, pues contiene elementos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

donde $a_n = 0$ o $a_n = 2$ (¿Por que?)

Conjunto de Cantor

Calculemos la medida exterior.
Definimos C mediante una interseccion de conjuntos decrecientes, por lo que su medida exterior es menor que A_n para todo n, por la monotonia de m^*. Calculemos la medida exterior de A_n. Cada A_n es la suma de 2^n intervalos de largo $\frac{1}{3^n}$ asi que

$$m^*(C) \leq (\frac{2}{3})^n \text{ para todo } n$$

y $m^*(C)$ es un real no negativo por lo que $m^*(C) = 0$

Conjunto de Cantor

El conjunto C es no numerable.
Hemos visto que sus elementos estan en biyeccion con las sucesiones a_n donde $a_n \in \{0, 2\}$. Existen varias funciones que nos muestran que este conjunto no es numerable, por ejemplo

- La funcion $f(a_n) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 2\}$ es una biyeccion con el conjunto $P(\mathbb{N})$
- La funcion $f(a_n) = \sum \frac{a_n}{2} \frac{1}{2^n}$ es tiene como imagen al intervalo $[0, 1]$ (¿Porque?). Esta es una funcion sobreyectiva a un conjunto no numerables.