Septiembre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía Semana 1: Introducción a la teoría de la medida

Nelson R. Alvarado H.

Una de las nociones claves de la geometría clásica es la de «área». Desde temprano en nuestra formación matemática incorporamos esta palabra a nuestro vocabulario y, más aún, contamos con fórmulas sencillas que nos permiten determinar el área de ciertas «figuras» simples e idealizadas: es así como aprendemos que el área de un rectángulo es «largo por alto» o que la de un triángulo es «base por altura dividido en dos». Ahora, con la introducción de coordenadas, una «figura geométrica» puede interpretarse como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y, en ese contexto, cabe preguntarse si acaso esta noción primitiva de «área» puede extenderse a un subconjunto arbitrario del plano.

Trabajar esta pregunta nos lleva en primer lugar a replantearnos ¿qué es «el área»? Bueno, el área de una figura geométrica F es un número real positivo $A(F)$ el cual de alguna forma «mide» el tamaño de dicho objeto. Planteado así, nos gustaría decir que «el área es **una función** que mide el tamaño de una figura geométrica». El primer gran problema con esta pseudodefinición es que habría que precisar cuál es el dominio de esta función «área». La idea -completamente imprecisa- sería decir que el dominio está compuesto por «los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que son figuras geométricas», es decir -por tautológico que suene- por aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ para los cuales sabemos calcular el área por métodos elementales. Así, de lo discutido hasta aquí, tenemos que si lo que queremos hacer es extender la noción primitiva de «área», lo que realmente debemos hacer es construir una función

$$m : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

cuyo dominio $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ sea lo más grande posible (es decir, que sepamos «medir el tamaño» de muchos conjuntos) y cuya regla de asignación tenga las propiedades que nuestra intuición geométrica nos dice que debiese tener.

Más precisamente, la función debiese satisfacer las siguientes propiedades:

1. *normalidad:* $m\left([a, b] \times [c, d]\right) = (b - a) \cdot (d - c)$. En efecto: esto es esperable pues $[a, b] \times [c, d]$ no es más que un rectángulo y el área de un rectángulo es «largo por alto»

2. *monotonía* Si $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subseteq B$ entonces esperaríamos que $m(A) \leq m(B)$. En efecto: en geometría clásica podemos encontrar cotas para el área de una figura circunscribiéndola en una más grande.

3. σ-*aditividad* Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos que «sabemos medir» (es decir $E_n \in \mathcal{M}$ para todo n) entonces también esperaríamos «saber medir» a la unión $\bigcup E_n$ y, más aún, se esperaría que

$$m\left(\bigcup E_n\right) = \sum m\left(E_n\right).$$

   En efecto; ésto es precisamente lo que hacemos cuando queremos determinar el área de «figuras complicadas»: dividirla en figuras más simples, determinar el área de estas figuras simples y sumar las áreas obtenidas.

4. Que sea invariante por traslaciones: no esperaríamos que la medida m de un objeto geométrico dependiese de su *posición* en el plano

Ahora bien, evidentemente, todo lo discutido hasta aquí puede extenderse fácilmente a subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3$, cambiando «área» por «largo» y «volumen», respectivamente. Incluso, más generalmente, podremos hablar de medidas en $\mathbb{R}^n$.

Naturalmente, quisiéramos poder medir a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Es decir, quisiéramos poder tener una función $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ que tuviese además todas las propiedades ya mencionadas. Lamentablemente, veremos a continuación que esto no es posible. La idea detrás de esto es que al querer medir un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ estamos tratando de medir conjuntos eventualmente muy abstractos que se alejan cada vez más de objetos geométricos o de interpretación física. Un resultado sorprendente en esta dirección es la famosa «paradoja de Banach-Tarski» que establece que la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$ puede «descomponerse» (usando el axioma de elección) en una cantidad finita de piezas de manera tal que éstas pueden reacoplarse para formar dos copias idénticas de la bola. Más precisamente, el problema que surge es que al asumir -como suele hacerse [1]- el axioma de elección, entonces seremos capaces de «construir» un conjunto suficientemente patológico que nos llevará a una contradicción.

Problema 1: (Conjunto de Vitali) No existe una función $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que m sea normal, monótona, σ-aditiva e invariante bajo traslaciones.

Sol: Lo haremos para $n = 1$. Queda como ejercicio extender este desarrollo para n arbitrario.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Decimos que x es $\mathbb{Q}$-equivalente a y y escribimos $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia [2] y, por tanto, las clases de equivalencia $[x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$ particionan la recta real. Como para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

[1] El axioma de elección, cuyo enunciado suena muy razonable, tiene consecuencias insospechadas como, por ejemplo, que todo conjunto admite un orden total o que todo espacio vectorial admite una base de Hamel. Más sutilmente, el axioma de elección está implícito en afirmaciones como «todo ideal propio de un anillo está contenido en uno maximal» o «un elemento de un anillo es nilpotente si y sólo si está en todo ideal primo»

[2] Esto no es más que el hecho de que $\mathbb{Q}$ es un subgrupo normal del grupo aditivo $\mathbb{R}$

que $[x] \cap [0,1] \neq \emptyset$, vemos **por axioma de elección**[3] que podemos formar un conjunto $V \subseteq [0,1]$ de manera que V contenga exactamente un elemento de cada clase. Supongamos entonces que exista la función m. Sea $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una numeración de los racionales en el intervalo $[-1,1]$ y $V_k := V + q_k = \{v + q_k : v \in V\}$. Tenemos que $V_k \cap V_l = \emptyset$ si $k \neq l$. En efecto: si $x \in V_k \cap V_l$ entonces existen $v, v' \in V$ tales que

$$v + q_k = x = v' + q_l,$$

de donde se desprende que $v - v' = q_l - q_k \in \mathbb{Q} - \{0\}$, es decir, $v \sim v'$ con $v \neq v'$, lo cual es absurdo por la construcción de V. Como estos conjuntos son disjuntos, se tiene, por σ-aditividad, que

$$m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m\left(V_k\right). \tag{1}$$

Por otro lado, como $V \subseteq [0,1]$, se tiene que $V_k \subseteq [-1,2]$ y, por tanto, $\cup V_k \subseteq [-1,2]$. Así, por monotonía, normalidad y la ecuación (1) vemos que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(V_k) \leq m([-1,2]) = 3.$$

Por otro lado, como m es invariante por traslaciones, tenemos que $m(V_k) = m(V)$ para todo k. De esta forma tenemos entonces que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(V) \leq 3.$$

Ahora bien, esto último no puede suceder salvo que $m(V)$ fuese cero (*¿por qué?*). Afirmamos que esto no puede suceder. Para probarlo probaremos que, de hecho, $[0,1] \subseteq \bigcup V_k$. Sea $t \in [0,1]$ y v el único elemento de $[t] \cap [0,1]$. En tal caso se tiene que $t - v$ es un racional que necesariamente está entre -1 y 1. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t - v = q_k$ y, por consiguiente, $t \in V_k$. De esta manera concluimos que $[0,1] \subseteq \cup V_k$ y, por tanto,

$$0 < 1 = m([0,1]) \leq m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(V) = 0,$$

lo cual es absurdo.

Hecha esta introducción (y habiendo visto que no todo subconjunto de la recta real podrá tener un «largo»), quedan naturalmente planteadas ciertas preguntas: ¿qué conjuntos podremos «medir»? a aquellos conjuntos que podamos medir ¿cómo los mediremos? y, haciendo este salto de abstracción ¿podremos recuperar las intuiciones geométricas que teníamos? Lo que haremos en toda la primera parte del curso será tratar de responder a estas preguntas de manera formal y rigurosa. Más concretamente, en las próximas semanas nos avocaremos a definir y trabajar *la medida de Lebesgue*. Esto es, definiremos

[3] Existen ciertas escuelas, llamadas «intuicionistas», trabajan una «matemática paralela» en la que no se asume el axioma de elección

de manera precisa qué subconjuntos de la recta real tendrán un largo, diremos cómo «medir» ese largo y, más aún, indagaremos en las principales propiedades de esta forma de «medición».

Para determinar qué conjuntos serán a los que llamaremos medibles, definimos primero *la medida exterior de Lebesgue* como la función

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} : A \to \text{ínf} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) : A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (a_k, b_k) \right\}.$$

En primer lugar, notemos que esta definición corresponde -intuitivamente- al resultado de aproximar sucesivamente un conjunto arbitrario A mediante conjuntos simples (los intervalos) para así estimar «el tamaño de A» (¿le parece conocido este procedimiento?) Notemos también que $A \subseteq \mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+2)$ y, por tanto, el conjunto cuyo ínfimo define a m^* es siempre no vacío. Más aún, como $\sum (b_k - a_k) \geq 0$ se tiene que el conjunto

$$\left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) : A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (a_k, b_k) \right\}.$$

es acotado inferiormente por 0. Así este conjunto es no vacío y acotado inferiormente, por tanto tiene ínfimo (aunque, por supuesto, puede ser infinito puesto que admitimos la posibilidad de cubrimientos infinitos). Por otro lado, por una conocida caracterización de ínfimo sabemos que dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de A de manera que

$$m^*(A) + \varepsilon > \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k).$$

Comentario: Note que lo anterior se cumple trivialmente en el caso de que todo cubrimiento de A satisfaga $\sum (b_k - a_k) = \infty$

Antes de ver algunas propiedades de esta función, veamos un par de ejemplos sencillos de cálculo de medida exterior:

Ejercicio: La medida exterior de un punto es cero

Sol: Sea $A = \{a\}$ y $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Se tiene que el intervalo $\left(a - \dfrac{1}{2n}, a + \dfrac{1}{2n} \right)$ cubre a A y por tanto se tiene que

$$0 \leq m^*(A) \leq \left(a + \frac{1}{2n} \right) - \left(a - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{n}$$

y, por tanto, por teorema de encaje concluimos que $m^*(A) = 0$, como se quería.

Problema 2: La medida exterior de un conjunto numerable es cero. En particular, $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Sol: Digamos que $A = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Sea $I_{k,\varepsilon} = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right)$. Para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que la familia $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de A y, por tanto -por definición de ínfimo- se tiene que

$$0 \leq m^*(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) - \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

y, por tanto -como ε es arbitrario- concluimos que $m^*(A) = 0$, como se quería.

La proposición 3.2.1 del libro de Royden (**muy importante**) muestra que la medida de un intervalo es su largo, por lo tanto, esta función m^* es *normal*. Por otro lado, la proposición 3.2.2 (**también muy importante**) muestra que m^* es también σ-**sub**aditiva (**Ejercicio:** pruebe que $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ usando la σ-subaditividad). Veremos a continuación que m^* posee otras buenas propiedades:

Problema 3: m^* es monótona e invariante por traslaciones

Sol:

- **Monotonía:** Si $A \subseteq B$ entonces todo cubrimiento de B es un cubrimiento de A y, por tanto, por definición de ínfimo concluimos que $m^*(A) \leq m^*(B)$.
- **Invarianza por traslaciones:** Notemos que si $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$[a, b] + c := \{t + c : t \in [a, b]\} = [a + c, b + c].$$

  Por lo tanto, $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cubre a un conjunto A si y sólo si $\{I_k + c\}_{k\in\mathbb{N}}$ cubre a $A + c$. Así, como el largo de un intervalo $[a, b]$ es el mismo que el de $[a+c, b+c]$, concluimos lo que se quería.

Notemos que los dos últimos problemas muestran que no es cierto en general que $m^*(A) = m^*(\text{cls}(A))$. En efecto: como $\mathbb{Q}$ es numerable se tiene que $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ pero $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $m^*(\mathbb{R}) = \infty$ (por ejemplo, por monotonía, pues $[0, N] \subseteq \mathbb{R}$ para todo N).

Problema 4: (Prop. 3.2.5 del libro de Royden)

a) Pruebe que dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto abierto O de $\mathbb{R}$ tal que $m^*(O) \leq m^*(A) + \varepsilon$.

b) Se dice que un subconjunto G de $\mathbb{R}$ es de tipo G_δ si es intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ (observación: recuerde que una intersección arbitraria de conjuntos abiertos **no** es necesariamente abierto ¿puede dar un ejemplo?). Pruebe que dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ existe un conjunto G de tipo G_δ tal que $m^*(A) = m^*(G)$.

Sol:

a) Como comentamos anteriormente, de la caracterización de ínfimo tenemos que dado A existe un cubrimiento $\{(a_k, b_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de A tal que

$$m^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k).$$

Sea $O := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k)$. Por definición tenemos que $A \subseteq O$. Por otro lado, por σ-subaditividad tenemos que

$$m^*(O) = m^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k, b_k)\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*((a_k, b_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k),$$

donde en la última igualdad se usa la proposición 3.2.1 (que dice que la medida de un intervalo es su largo). Así, acoplando las desigualdades, obtenemos que

$$m^*(A) + \varepsilon \geq m^*(O),$$

como se quería.

b) En virtud de lo anterior, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto O_n con $A \subseteq O_n$ tal que

$$m^*(A) + \frac{1}{n} \geq m^*(O_n).$$

Sea $G := \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Tenemos, por definición, que G es de tipo G_δ. Como para cada n se tiene que $A \subseteq O_n$, se tiene también que $A \subseteq \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = G$ y, por tanto, por monotonía concluimos que $m^*(A) \leq m^*(G)$. Por otro lado, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $G \subseteq O_n$ se sigue -nuevamente por monotonía- que

$$m^*(O_n) \geq m^*(G)$$

y, por tanto,

$$m^*(A) + \frac{1}{n} \geq m^*(G)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, como n es arbitrario, concluimos que $m^*(A) \geq m^*(G)$. Así, como $m^*(A) \leq m^*(G)$ y $m^*(A) \geq m^*(G)$ concluimos que $m^*(A) = m^*(G)$, como se quería.

Se dejan al lector los siguientes ejercicios y problemas, los cuales deben pensarse como complemento de los ejercicios y problemas del libro, así como de los presentados en esta ayudantía.

1. Adapte la demostración de que $m^*([a,b]) = b-a$ para probar que $m^*\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]\right) = (b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $c > 0$. Se define

$$cA := \{ca : a \in A\}.$$

Pruebe que $m^*(cA) = c \cdot m^*(A)$.

3. Sea A el conjunto de los números irracionales en el intervalo $[0,1]$. Determine $m^*(A)$.

Definimos una *caja en* $\mathbb{R}^n$ como un conjunto de la forma

$$C = (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n).$$

Definimos el *volumen* de esta caja como

$$V(C) = (b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n) = \prod_{j=1}^{n}(b_k-a_k).$$

Así, la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es la función

$$m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\} : A \to \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} V(C_k) : A \subseteq \bigcup C_k,\ C_k \text{ es una caja}\right\}.$$

4. Pruebe que un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula

5. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ con $m^*(Z) = 0$. Pruebe que $m^*(Z \times I) = 0$.

6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$\Gamma_f := \{(t, f(t)) : t \in [0,1]\}$$

su gráfico. Determine $m^*\left(\Gamma_f\right)$.