Ayudantia 3

Juan Francisco Peña Miralles

13 de agosto de 2021

Un conjunto no medible

Hemos definido la medida exterior m^*, la cual esta definida para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y tiene las siguiente propiedades

- Para toda coleccion numerable de conjuntos A_i, es cierto que

$$m^*(\bigcup A_i) \leq \sum m^*(A_i)$$

- La funcion m^* es invariante por traslaciones, esto es, $m^*(A + c) = m^*(A)$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$
- Si $A \subset B$ entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

En la proxima clase una σ-algebra de conjuntos para los cuales m^* es aditiva y llamaremos a estos conjuntos medibles. Ahora vamos a demostrar que existe un conjunto no medible

Los conjuntos de Vitali

Construiremos un conjunto no medible, conocido como conjunto de Vitali.
En el intervalo $[0, 1)$ definినimos la suma modulo 1:

$$x\overline{+}y = \begin{cases} x + y \text{ si } x + y \in [0, 1) \\ x + y - 1 \text{ si } x + y \notin [0, 1) \end{cases}$$

Tambien podemos definir esta suma como la suma del grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

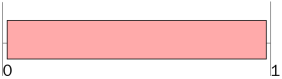

Figura: Un intervalo en [0,1)

Los conjuntos de vitali

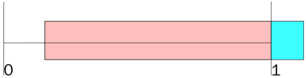

Figura: Trasladamos el intervalo, hay una parte dentro y una fuera

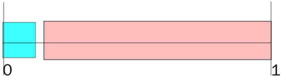

Figura: La suma modulo uno mueve esta parte dentro de [0,1)

Los conjuntos de vitali

Para cualquier subconjunto A de $[0,1)$, al trasladar por una constante y mediante la suma modulo uno se obtiene un conjunto formado por la union de $A+y\cap[0,1)$ y $(A+y\setminus[0,1))-1$. La medida es invariante por traslacion y $A+y\cap[0,1)$ es disjunto de $(A+y\setminus[0,1))$ por lo que si A es medible, su medida es tambien invariante por traslacion modulo 1

Los conjuntos de Vitali

El conjunto $\mathbb{Q}$ es un subgrupo de grupo aditivo de $\mathbb{R}$, por lo que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es una particion de $\mathbb{R}$ en los conjuntos $a + \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in \mathbb{Q}\}$.
Para cada clase de equivalencia, dado un representante a le podemos restar su parte entera, la cual es un numero racional, para obtener un representante de esta clase en $[0, 1)$

Los conjuntos de Vitali

Usaremos el axioma de eleccion:

Axioma de eleccion

Dada una coleccion de conjuntos $\mathcal{C}$ existe una funcion F cuyo dominio es $\mathcal{C}$ tal que $F(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{C}$

Existe un conjunto $P \subset [0, 1)$ que contiene un unico elemento de cada clase de equivalencia.

Los conjuntos de Vitali

Para todo racional y en el conjunto $[0, 1)$ realizamos una traslacion modulo 1 al conjunto P. Estas traslaciones son disjuntas por pares pues cada clase de equivalencia tiene a un unico representante en P.

Los conjuntos de Vitali

Cada elemento $a \in [0,1)$ pertenece a una clase de equivalencia y hay un elemento $p \in P$ que pertenece a esta clase. Dado que $P \subset [0,1)$, la diferencia $|p-a| \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ por lo que $a \in P \overline{+} |p-a|$

Los conjuntos de Vitali

Los racionales son numerables, por lo que podemos escribir $[0, 1)$ como una union de numerables conjuntos disjuntos por pares:

$$[0, 1) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} P \overline{+} q$$

Si P es medible estos conjuntos son medibles y su medida es igual a la de P, por lo que tenemos la igualdad.

$$1 = m^*[0, 1) = m^* \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} P \overline{+} q = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m^* P \overline{+} q = \sum^{\infty} m^* P$$

Los unico valores posibles para una serie con valor constante son 0 y ∞, por lo que P no es medible

Caratheodory

Queremos encontrar una manera de definir los conjuntos medibles. Volvamos a la integral de Riemann. Una funcion es integrabl si su suma inferior es igual a su suma superior en el limite

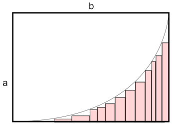

Figura: Suma inferior dentro de caja con area a*b

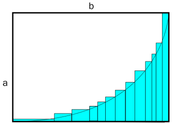

Figura: Suma superior dentro de caja con area a*b

Caratheodory

Hemos puesto la integral dentro de una caja cuya area conocemos. Si podemos calcular la suma inferior, podriamos definir la suma superior a partir de la suma inferior de su complemento (si hubiera una definicion para la integral del complemento)

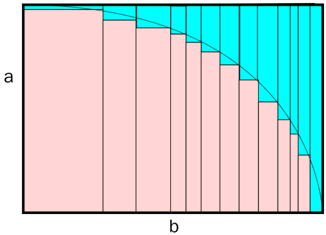

Figura: La suma superior es igual al area de la caja menos la suma inferior del complemento

Caratheodory

Dado un conjunto E existe la medida para su complemento E^c por podemos escribir esta igualda sin la necesidad de definir una "medida interior":

$$m^*(A) - m^*(E^c \cap A) = m^*(E \cap A)$$

Donde A es un conjunto que esta usando para medir el interior y exterior de E

Caratheodory

No existe un conjunto A preferible para hacer esta evaluacion, por lo que obtenemos la siguiente definicion

Criterio de Caratheodory

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es medible si

$$m^* A = m^*(E^c \cap A) + m^*(E \cap A)$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$

Sabemos que

$$m^* A \leq m^*(E^c \cap A) + m^*(E \cap A)$$

siempre es cierto por subaditividad y esta desigualdad siempre se cumple si $m^* A = \infty$ por lo que podemos usar el siguiente criterio

Caratheodory

Criterio de Caratheodory

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es medible si

$$m^*A \geq m^*(E^c \cap A) + m^*(E \cap A)$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$ tal que $m^*(A) < \infty$

En la proxima clase demostraremos que los conjuntos medibles dados por esta definicion cumplen dos propiedades

- Los conjuntos medibles son una $\sigma-$algebra
- La restriccion de m^* a los conjuntos medibles es una medida aditiva

Ejercicio

Ejercicio

Todo conjunto E tal que $m^*(E) = 0$ es medible

El conjunto $E \cap A$ esta contenido en E y por monotonia $m^*(E \cap A) = 0$. El conjunto $E^c \cap A$ esta contenido en A y por monotonia

$$m^* A \geq m^*(E^c \cap A) = m^*(E^c \cap A) + m^*(E \cap A)$$

Ejercicio

Ejercicio

Demuestre que si E es medible y $m^*E < \infty$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $O \supset E$ tal que $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$

Demostracion:
Existe un cubrimiento por intervalos abiertos I_n tal que $\sum m^*(I_n) \leq m^*E + \varepsilon$. Sea $O = \bigcup A_n$:

$$\varepsilon \geq \sum m^*(I_n) - m^*E \geq m^*O - m^*E = m^*O - m^*(E \cap O)$$

El conjunto E es medible por lo que esta ultima diferencia es igual a $m^*(O \setminus E)$