Ayudantia 4

Juan Francisco Peña Miralles

August 2021

Ejercicio

Ejercicio

Sea E medible. Demostrar que $E + c$ es medible

Sea A un conjunto cualquiera. Tenemos que comprobar que $E + c$ cumple el criterio de Carathodory:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E + c) + m^*(A \cap (E + c)^c)$$

El conjunto E es medible por lo que para $A - c$

$$m^*(A - c) = m^*(A - c \cap E) + m^*(A - c \cap E^c)$$

Ejercicio

La medida es invariante por traslaciones, trasladamos por c para obtener

$$m^*(A) = m^*(A \cap E + c) + m^*(A \cap (E + c)^c)$$

Esta igualdad es cierta pues la traslacion distribuye sobre la interseccion de conjuntos y conmuta con el complemento

Ejercicio

La traslacion $A + c$ es la imagen de A en la funcion $f(x) = x + c$, la cual es invertible, por lo que esto es una concecuencia de las igualdades:

- $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$
- $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$
- $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

las cuales son ciertas para toda funcion f.
Tambien usaremos

$$f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

Ejercicio

Ejercicio

Sean A y B medibles. Demostrar que

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = mA + mB$$

(Ver ejemplo intevalos)
Si uno de los conjuntos tiene medida infinita, ambos loados de la igualdad son infinitos.
Los conjuntos A y B son iguales a la union de conjuntos disjuntos y medibles:

$$A = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

luego

$$mA + mB = m(A \setminus (A \cap B)) + 2m(A \cap B) + m(B \setminus (A \cap B)) \quad (1)$$

Ejercicio

Escribimos $A \cup B$ como la union de conjuntos disjuntos

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$$

Al ser disjuntos y medibles

$$m(A \cup B) = m(A \setminus (A \cap B)) + m(A \cap B) + m(B \setminus (A \cap B)) \quad (2)$$

Reemplazamos 2 en 1 para obtener

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = mA + mB$$

Ejercicio

Ejercicio

Sea A medible y $A \subset B$ con $m^*(B) < \infty$. Demostrar que

$$m^*(B \setminus A) = m^*(B) - m^*(A)$$

El conjunto A es medible por lo que cumple el criterio de Caratheodory

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A)$$

y $A \subset B$ por lo que $A \cap B = A$, luego,

$$m^*(B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A)$$

Ejercicio

Ejercicio

Sea E_n una sucesion creciente de conjuntos medibles, esto es, $E_i \subseteq E_{i+1}$. Demostrar que

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

Una serie es el limite de las sumas finitas, por lo que escribimos $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como una union disjunta de conjuntos medibles.

$$E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)$$

Ejercicio

Los conjuntos $E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)$ son disjuntos y medibles por lo que

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i))$$

Volvemos a usar la aditividad para este ultimo conjunto

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{N\to\infty} m(\bigcup_{i=1}^{N} E_i)$$

y la sucesion es creciente, por lo que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_n$, luego

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

Ejercicio

Ejercicio

Sea E_n una sucesion de conjuntos medibles tal que $\sum mE_n$ converge. Demostrar que

$$m(\bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n} E_k) = 0$$

La sucesion $A_n = \bigcup_{k=n} E_k$ es decreciente.
La serie $\sum mE_n$ converge, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} mE_n < \varepsilon$$

Por lo que $m(A_N) < \varepsilon$

Ejercicio

Para todo $m > 1$, en particular para N

$$\bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n} E_k \subset \bigcap_{n=N} \bigcup_{k=n} E_k = \bigcap_{n=N} A_n \subset A_N$$

por lo que

$$m(\bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n} E_k) \leq \varepsilon$$

y esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$.
Tambien podriamos haber usado la propsicion 14 de Royden

Ejercicio

Ejercicio

Sea E un conjunto de medida 0 y $f(x) = x^2$. Demostrar que $f(E)$ tiene medida 0.

Asumamos que $E \subset [-n, n]$ para algun natural.
Dado que E tiene medida 0 existe un cubrimiento de intervalos abiertos I_n tal que $\sum m(I_n) < \varepsilon$.
A partir de cada I_n creamos los intervalos $I_n \cap (-\infty, 0)$ y $I_n \cap (0, \infty)$ y llamamos a la coleccion de estos intervalos J_n, los cuales son una coleccion numerable que cubren a E y

$$\sum mJ_n = \sum mI_n$$

Ejercicio

Cada intervalo J_n es un intervalo (a,b) donde a y b tienen el mismo signo, por lo que su imagen $f(a,b)$ es (a^2,b^2), luego,

$$m(f(J_n)) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \leq (b-a)2n$$

de donde obtenemos la cota

$$m(f(\bigcup J_n)) \leq 2n\varepsilon$$

Los intervalos J_n son un cubrimiento de E, por lo que $f(E) \subset f(\bigcup J_n)$ y por la monotonia

$$m(fE) \leq 2n\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$

Ejercicio

Si E no es acotado, para cada n existe un cubrimiento de $E \cap [-n, n]$ por abiertos $I_{n,m}$ tal que

$$\sum_m m(I_{n,m}) < \varepsilon \frac{1}{n2^n}$$

por el argumento anterior obtenenemos un conjunto que contiene a $f(E \cap [-n, n])$ y cuya medida es menor que $2\varepsilon\frac{1}{2^n}$.
La union de estos conjuntos contiene a E y la medida de esta union es menor que 4ε

En el ejercicio anterior, si a y b son negativos entonces

$$f(a,b) = (b^2, a^2)$$

pero la cota sigue siendo cierta pues

$$m(a,b) = b - a = -(|b| - |a|) = |a| - |b|$$

y

$$m(b^2,a^2) = a^2 - b^2 = (|a| - |b|)(|a| + |b|) \leq (|a| - |b|)2n = 2n * m(a,b)$$