Ayudantia 1

Juan Francisco Peña Miralles

July 2021

Introduccion

En este semestre estudiaremos la integral de Lebesgue.
Cuando definimos la integral de Rienmann aproximamos el area debajo de una funcion mediante una particion de $[a, b]$ en subintervalos

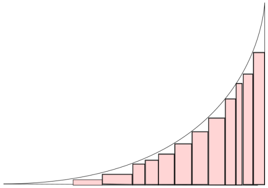

Figura: La integral de Riemann

Para definir la integral de Lebesgue tendremos que poder definir una medida m que nos de el tamaño de conjuntos que no sean intervalos

Medida y conjuntos medibles

Antes de definir una medida m queremos conocer que caracteristicas tienen los conjuntos que podemos medir.
A continuacion veremos que condiciones deberia cumplir una familia de conjuntos *medibles*.

Conjuntos medibles

Sabemos que el largo de un intervalo (a_1, b_1) es $b_1 - a_1$. Si tenemos dos intervalos disjuntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) entonces el largo de $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$ deberia ser la suma del largo de cada intervalo.
Para que esto se cumpla con cualquier par conjuntos medibles, la familia de conjuntos medibles debe cumplir:

1.Cerrado por uniones finitas

Si A y B son conjuntos medibles, entonces $A \cup B$ es medible.

Por induccion, esto tambien es cierto para finitos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Conjuntos medibles

En este ejemplo conocemos los radios y por lo tanto las areas de ambos circulos

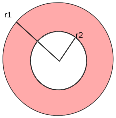

Figura: ¿Cual es el area de la figura roja?

Restando estas areas obtenemos el area de la figura roja la cual es el complemento del circulo interior. A partir de esto

2.Cerrado por complemento

Si A es un conjunto medible, entonces A^c es medible.

Algebras de conjuntos

Dado un conjunto X, una familia $\mathcal{A} \subset P(X)$ es un **Algebra** (tambien conocida como un **Algebra de Boole**) si

1. $X, \phi \in \mathcal{A}$
2. Si $A_i \in \mathcal{A}$ para finitos A_i entonces el conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$
3. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$

Algebras

2 y 3 implican una cuarta propiedad:

Cerrado por interseciones finitas

Si $A_i \in \mathcal{A}$ para finitos A_i entonces el conjunto $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}$

Demostracion:
Por 2 y 3, $(A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c)^c \in \mathcal{A}$ (Demostrar). Por ley de De Morgan $(A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c)^c = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

Ejemplos de Algebras

La familia $\{X, \phi\}$ es un algebra sobre X.
El conjunto potencia $P(X)$ es un algebra sobre X

Algebras

Dado una familia de subconjuntos $\mathcal{C} \subset P(X)$ existe una menor algebra $\mathcal{A}$ que la contiene (el **algebra generada por** $\mathcal{C}$).
Demostracion:
Sea $\mathcal{F}$ la familia de algebras que contienen a $\mathcal{C}$. Esta familia es no vacia pues $P(X)$ es un algebra y contiene a toda coleccion de subconjuntos de X. El conjunto

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{F}} \mathcal{B}$$

contiene a $\mathcal{C}$.
Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A, B \in \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Cada familia $\mathcal{B}$ es un algebra, por lo que $A \cup B \in \mathcal{A}$.
Podemos hacer lo mismo para el complemento A^c, demostrando que $\mathcal{A}$ es un algebra (¿Porque es la mas pequeña?).

Sigma-Algebras

Para definir el limite de una sucesion de conjuntos debemos poder unir e intersectar infinitos conjuntos

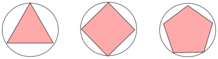

Figura: El area de esta sucesion converge a un circulo

Si en un algebra reemplazamos (2) por:

- Si $A_i \in \mathcal{A}$ para numerables A_i entonces el conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

la llamamos una σ-**algebra**

Proposicion

Dados conjuntos A_i existen conjuntos E_i tal que $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$ y

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Demostracion:
Definimos

$$E_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

de manera que $E_n \cap A_i = \phi$ para $i < n$ y $E_n \subset A_n$ por lo que $E_n \cap E_i = \phi$ para $i < n$.

Demostracion

Usamos induccion para demostrar la igualdad. Por definicion, $E_1 = A_1$. Sea $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Obtenemos la siguiente ecuacion

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = E_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i = (A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Sigma-Algebras

Para una sucesion A_i podemos escribir $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como la union de una sucesion creciente

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

definiendo $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Conjuntos de Borel

Un conjunto es de Borel si pertenece a la σ-algebra generada por los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.
El complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado por lo que estos son tambien conjuntos de Borel Ejemplos: El conjunto $\mathbb{Q}$ es la union numerable de puntos, los cuales son conjuntos cerrados.
Otro ejemplo de conjuntos de Borel que pueden no ser cerrados ni ser abiertos son la uniones numerables de conjuntos cerrados, los cuales se conocen como $\mathcal{F}_\sigma$ y la interseccion numerable de conjuntos abiertos, $\mathcal{G}_\delta$
Un conjunto que pertenece a ambos conjuntos es el intervalo $[a, b)$, el cual puede ser aproximado por la izquierda mediante la interseccion de intervalos abiertos o por la derecha mediante la union de intervalos cerrados.