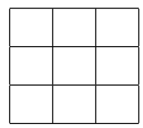
Estructuras Algebraicas
Prof. Giancarlo Lucchini
Ay. Claudio Bravo, Juan Pablo Llerena

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Prueba 2

Viernes 22 de octubre de 2021

Ejercicio 1. Considere un tablero cuadrado de 3×3 como el siguiente:



Encuentre la cantidad de maneras esencialmente distintas (es decir, salvo rotaciones) en las que se puede colorear las casillas de dicho tablero usando 3 colores. Justifique su respuesta. Puede usar calculadora para obtener el número final.

Ejercicio 2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y sea $\mathcal{O}$ una órbita de la acción. Para $x \in \mathcal{O}$, sea G_x el estabilizador de x en G.

1. Demuestre que si no existe otra órbita para esta acción, entonces $|X| \leq |G|$.
2. Sea $x \in \mathcal{O}$. Demuestre que $G_x = G_y$ para todo $y \in \mathcal{O}$ si y sólo si G_x es normal en G.
3. Sea $x \in \mathcal{O}$ tal que $G_x \lhd G$. Demuestre que el grupo cociente G/G_x actúa sobre $\mathcal{O}$ vía la fórmula $(gG_x)y := gy$ para $gG_x \in G/G_x$ e $y \in \mathcal{O}$.

Ejercicio 3. Sea $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ el anillo de cuaterniones.

1. Encuentre subanillos de $\mathbb{H}$ isomorfos a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.
2. Encuentre todos los ideales de $\mathbb{H}$.
3. Pruebe que el anillo $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.
4. ¿Existe un ideal I de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x]/I$ sea isomorfo a $\mathbb{H}$?

Ejercicio 4 (Verdadero o Falso)**.** Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta. Una respuesta sin justificar vale 0 puntos.

1. Sea D un dominio de integridad y sea $S \subset D$ un subanillo. Entonces S es un dominio de integridad.
2. Si R es un anillo conmutativo de característica p prima y $S \subset R$ es un subanillo distinto de $\{0\}$, entonces S tiene característica p.
3. Sean R_1, R_2 anillos conmutativos unitarios y sean $I_1 \subset R_1$, $I_2 \subset R_2$ ideales maximales respectivos. Entonces $I_1 \times I_2$ es un ideal maximal de $R_1 \times R_2$.
4. Sean $I, J \subset R$ dos ideales primos distintos de un anillo conmutativo y unitario. Entonces $I \cap J$ es un ideal primo.

Pauta tentativa:
Ejercicio 1: $1,5$.
Ejercicio 2: $0,4 + 0,4 + 0,4 = 1,2$.
Ejercicio 3: $0,3 + 0,4 + 0,5 + 0,5 = 1,7$.
Ejercicio 4: $0,4 + 0,4 + 0,4 + 0,4 = 1,6$.